

# Elementi di Topologia Algebrica

Lorenzo Montana

Febbraio 2024

Sono riportati in queste dispense i risultati del corso di Elementi di Topologia Algebrica dell'Anno Accademico 2022/2023 tenuto dal Professor F. Callegaro all'Università di Matematica di Pisa. Le note si basano pesantemente sulle lezioni, ma sono state completate qua e là attingendo alla bibliografia consigliata dal Professore:

- A. Hatcher, Algebraic Topology, 2002
- T. tom Dieck, Algebraic Topology, EMS, 2008
- W. Massey, Singular Homology Theory, Springer, 1980

Questa versione delle note è stata rivista grazie alle correzioni a cui hanno contribuito Bertoloni Andrea, Crovetto Pietro, Dell'Agnello Enrico, Grigoletto Franco, Matano Leonardo, Snaidero Andrea, Sorce Francesco, Vantaggio Luca.

Per eventuali correzioni potete contattarmi per mail all'indirizzo [l.montana@studenti.unipi.it](mailto:l.montana@studenti.unipi.it)



# Contents

<b>1</b>	<b>Complessi Algebrici</b>	<b>1</b>
1.1	Successioni Esatte . . . . .	2
1.2	Omotopia di Complessi di Catene . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Omologia Singolare</b>	<b>5</b>
2.1	Primi Conti . . . . .	7
2.2	Omologia Ridotta . . . . .	7
2.3	Mappe Omotope e Omotopia di Catene . . . . .	8
2.4	Successione di Mayer-Vietoris . . . . .	10
2.4.1	Conseguenze del Teorema di Mayer-Vietoris . . . . .	11
2.5	Legame tra Primo Gruppo di Omologia e Gruppo Fondamentale . . . . .	13
2.6	Suddivisioni Baricentriche . . . . .	14
2.6.1	Ricoprimenti e Simplessi $\mathcal{U}$ -piccoli . . . . .	17
2.7	Omologia Relativa . . . . .	19
2.7.1	Teorema Escissione . . . . .	19
2.7.2	Teorema di Jordan-Brouwer . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Omologia di Grafi</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Omologia di Superfici Compatte</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Complessi CW</b>	<b>31</b>
5.1	Omologia di Complessi CW . . . . .	33
5.1.1	Omologia di $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	38
5.1.2	Omologia di $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Omologia e Co-omologia a Coefficienti in un Modulo</b>	<b>41</b>
6.1	Funtori Tor e Ext . . . . .	42
6.2	Coefficienti Universali . . . . .	45
6.3	Omologia e Co-omologia Relativa . . . . .	48
6.4	Mayer-Vietoris a Coefficienti in $G$ . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Prodotto CUP (<math>\smile</math>)</b>	<b>49</b>
7.1	Teorema di Eilenberg-Zilber . . . . .	49
7.2	Formula di Kunneth . . . . .	52
7.3	Approssimazione Diagonale e Prodotto CUP . . . . .	54
7.3.1	In Co-omologia Relativa . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Omologia di Varietà</b>	<b>59</b>

<b>9 Prodotto CAP (<math>\frown</math>)</b>	<b>63</b>
9.1 Caso Relativo . . . . .	64
<b>10 Co-omologia a Supporto Compatto</b>	<b>65</b>
10.1 Teorema della Dualità di Poincaré . . . . .	68
10.1.1 Anello di Co-omologia di $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	71
<b>11 Gruppi di Omotopia</b>	<b>73</b>
11.1 Fibrazioni . . . . .	75
11.2 Gruppi di Omotopia Relativa . . . . .	76
11.3 Teorema di Escissione in Omotopia . . . . .	80
11.4 Isomorfismo di Freudenthal . . . . .	81
<b>12 Omotopia di Complessi CW</b>	<b>83</b>
12.1 Teorema di Approssimazione Cellulare . . . . .	86
12.2 Teorema di Whitehead . . . . .	88
12.3 Teorema di Approssimazione CW . . . . .	89
12.4 Teorema di Hurewicz . . . . .	91
<b>13 Invariante di Hopf</b>	<b>95</b>
13.1 Costruzione dell'invariante $\mathcal{H}(f)$ . . . . .	96

# Chapter 1

## Complessi Algebrici

Sia  $R$  un anello commutativo con unità, e sia  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  la categoria di  $R$ -moduli graduati:  $M$  oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  è una famiglia  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  di  $R$ -moduli, e un morfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  di grado  $p$  è una famiglia di morfismi di  $R$ -moduli  $\varphi_n : M_n \rightarrow M'_{n+p}$ .

**Definizione 1** Un *complesso di catene*  $C = \{C_n, \partial_n\}$  su  $R$  è un oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  con un morfismo  $\partial$  di grado  $-1$  e tale che  $\partial^2 = 0$ , o in altre parole  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ . L'omomorfismo  $\partial$  è detto *mappa di bordo* o anche *differenziale*.

$$\dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \dots$$

**Definizione 2** Un morfismo  $\varphi$  di complessi di catene è un morfismo  $\varphi : C \rightarrow D$  nella categoria  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  di grado  $0$  e tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

**Definizione 3** Dato un complesso di catene  $C = \{C_n, \partial_n\}$ , l'*omologia* di  $C$  è  $H_*(C) = \{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $H_n(C) = \ker(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ .  $H_n(C)$  è detto *n-simo gruppo di omologia* di  $C$ .

**Fatto 1.1** Un morfismo di catene  $\varphi : C \rightarrow D$  induce un morfismo di grado  $0$  tra  $R$ -moduli graduati  $H(\varphi) : H_*(C) \rightarrow H_*(D)$  (ciò discende dalla proprietà  $\partial^2 = 0$  e che  $\varphi$  commuta con  $\partial$ ). Dunque  $H$  è un funtore (covariante) dalla categoria dei complessi di catene su  $R$  alla categoria degli  $R$ -moduli graduati.

**Definizione 4** i. Gli elementi di  $C_n$  sono detti *n-catene*

ii. Gli elementi di  $Z_n(C) := \ker(\partial_n)$  sono detti *n-cicli*

iii. Gli elementi di  $B_n(C) := \text{Im}(\partial_{n+1})$  sono detti *n-bordi*

**Definizione 5** Se due *n-cicli* rappresentano la stessa classe in  $H_n(C)$  diciamo che sono omologhi. Per  $c \in Z_n(C)$  indichiamo con  $[c]$  la sua classe in  $H_n(C)$ .

**Osservazione.** Se per qualche  $n \in \mathbb{Z}$  sostituisco  $\partial_n$  con  $-\partial_n$  ottengo un nuovo complesso di catene, ma il complesso originale e quello nuovo hanno stessa omologia.

**Definizione 6** Un *complesso di co-catene*  $C = \{C^n, \partial^n\}$  è un oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  con un morfismo  $\partial$  di grado  $+1$  e tale che  $\partial^2 = 0$ . Si definiscono anche *co-bordi*, *co-cicli*, la *co-omologia*, *classi di co-omologia*.

## 1.1 Successioni Esatte

**Definizione 7** Siano  $A, B, C$  complessi di catene,  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $\psi : B \rightarrow C$  morfismi. Una successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

si dice *esatta corta* se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha che è esatta corta la successione

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

cioè per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  vale  $\text{Im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ ,  $\varphi_n$  iniettiva e  $\psi_n$  suriettiva.

**Teorema 1.2** Data una successione esatta corta di complessi di catene  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  esiste  $\omega : H_*(C) \rightarrow H_*(A)$  morfismo (detto *di connessione*) di grado  $-1$  tale che è esatta la successione

$$\dots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(B) \xrightarrow{\psi_n} H_n(C) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{\psi_{n-1}} \dots$$

*Dimostrazione.* Si tratta di fare diagram chasing sul seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\varphi_n} & B_n & \xrightarrow{\psi_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-2} & \xrightarrow{\varphi_{n-2}} & B_{n-2} & \xrightarrow{\psi_{n-2}} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sia  $\gamma \in Z_n(C)$  un ciclo (cioè  $\partial\gamma = 0$ ), vogliamo definire  $\omega([\gamma])$ . Per esattezza  $\psi_n$  è suriettiva, dunque esiste  $\beta \in B_n$  tale che  $\psi_n(\beta) = \gamma$ . Per commutatività  $\psi_{n-1}(\partial\beta) = \partial\gamma = 0$ , cioè  $\partial\beta \in \ker(\psi_{n-1}) = \text{Im}(\varphi_{n-1})$ . Dunque esiste  $\alpha \in A_{n-1}$  tale che  $\varphi_{n-1}(\alpha) = \partial\beta$ , da cui per commutatività abbiamo che

$$\varphi_{n-2}(\partial\alpha) = \partial\varphi_{n-1}(\alpha) = \partial^2\beta = 0$$

cioè  $\alpha \in Z_{n-1}(A)$ , dato che  $\varphi_{n-2}$  è iniettiva. Poniamo  $\omega([\gamma]) = [\alpha]$ .

Bisognerebbe verificare che la definizione non dipende dalle scelte di  $\gamma$  e  $\beta$  nelle rispettive classi, e poi che la successione così ottenuta è esatta. Per il momento non riportiamo queste verifiche.  $\square$

**Osservazione.** Date due successioni esatte corte e morfismi  $f, g, h$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tali che i quadrati commutino, otteniamo il seguente diagramma in omologia, in cui in particolare anche il quadrato rosso è commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

cioè l'omomorfismo di connessione  $\omega$  è naturale.

## 1.2 Omotopia di Complessi di Catene

Consideriamo il seguente problema: dati due morfismi di complessi di catene  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$ , vogliamo condizioni sotto le quali questi inducono la stessa mappa in omologia.

**Definizione 8** Un'omotopia  $s$  tra due morfismi  $\varphi, \psi : (C, \partial) \rightarrow (D, \partial')$  è un morfismo  $s : C \rightarrow D$  di grado  $+1$  tale per cui  $\varphi - \psi = \partial' s + s \partial$ , cioè per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha  $\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n$ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \varphi_{n+1} - \psi_{n+1} \downarrow & \swarrow s_n & \varphi_n - \psi_n \downarrow & \swarrow s_{n-1} & \varphi_{n-1} - \psi_{n-1} \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

**Proposizione 1.3**  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  morfismi di complessi omotopi inducono la stessa mappa in omologia:

$$H(\varphi) = H(\psi) : H(C) \rightarrow H(D)$$

*Dimostrazione.* Dato un ciclo  $z \in Z_n(C)$  (dunque  $\partial z = 0$ ) abbiamo

$$(\varphi - \psi)(z) = \partial s(z) + s(\partial z) = \partial s(z)$$

L'uguaglianza provata dice che la differenza tra  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  è un bordo, cioè i due sono omologhi.  $\square$

**Osservazione.** Il viceversa della Proposizione 1.3 non vale.

**Definizione 9** Un'omotopia tra  $0$  e  $Id$  è detta *contrazione*. Se una tale omotopia esiste, allora si ha  $H_n(C) = 0$  per ogni  $n$  e  $C$  è detto *complesso esatto*.





## Chapter 2

# Omologia Singolare

**Definizione 10** L' $n$ -simpleso standard è  $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ .

Notazione:  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ .

Sia ora  $m \leq n$ . Una  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  debolmente crescente induce

$$\Delta(\alpha) : \Delta^m \rightarrow \Delta^n \quad \text{data da} \quad \sum_{i=0}^m t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^m t_i e_{\alpha(i)}$$

Vale che  $\Delta(\alpha)\Delta(\beta) = \Delta(\alpha\beta)$ ,  $\Delta(Id) = Id$ , dunque  $\Delta$  è un funtore.

Sia  $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$  crescente, iniettiva e che "salta"  $i$ .

**Fatto 2.1** Per ogni  $i < j$  si ha  $\delta_j^{n+1}\delta_i^n = \delta_i^{n+1}\delta_{j-1}^n$ .

Siano anche  $d_i^n = \Delta(\delta_i^n)$ . Dal Fatto 2.1 e poiché  $\Delta$  è un funtore segue:

**Fatto 2.2** Per ogni  $i < j$  si ha  $d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n$ .

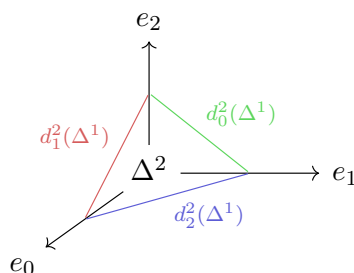
**Osservazione.** Per come sono definite, le  $d_i^n$  sono l'inclusione dell' $(n-1)$ -simpleso nell' $i$ -esima faccia dell' $n$ -simpleso.

**Definizione 11** Un  $n$ -simpleso singolare di uno spazio topologico  $X$  è una mappa  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . La  $i$ -esima faccia di  $\sigma$  è la mappa  $\sigma \circ d_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ .

**Definizione 12** Chiamiamo  $C_n(X)$  il gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari su  $X$ . Un  $x \in C_n(X)$ , detto  $n$ -catena singolare di  $X$ , è  $x = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$  con  $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$  nulli eccetto al più un numero finito. Definiamo la mappa di bordo  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$  come

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ d_i^q.$$

**Esempio 1** Consideriamo il caso del 2-simpleso



allora il bordo di una certa  $\sigma \in C_2(X)$ , cioè  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ , è  $\partial_2 \sigma = \sigma \circ d_0^2 - \sigma \circ d_1^2 + \sigma \circ d_2^2$  cioè la somma a segno alterno di  $\sigma$  ristretta ai lati.

**Osservazione.**  $\partial_0$  è la mappa nulla.

**Fatto 2.3**  $\partial^2 = 0$  (risultato che si ottiene usando la definizione di  $\partial$  e il Fatto 2.2).

**Definizione 13** Il complesso di catene  $(C_\bullet(X), \partial) = \{C_n(X), \partial_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è detto complesso delle catene singolari di  $X$ . Indichiamo  $H_n(X)$  l' $n$ -simo gruppo di omologia di  $(C_\bullet(X), \partial)$ .

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici induce un morfismo di complessi

$$\begin{aligned} f_\# = C(f) : C_q(X) &\rightarrow C_q(Y) \\ \sigma &\mapsto f\sigma \end{aligned}$$

Inoltre, come visto nel Fatto 1.1,  $f_\#$  induce un omomorfismo in omologia  $f_* = H(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ . Dunque si è mostrato che  $H$  è un funtore tra  $Top$  e  $Ab$ .

**Definizione 14** Data  $i : A \hookrightarrow X$  inclusione e la sua mappa indotta  $i_\# : C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$ , definiamo  $C_n(X, A) = \text{coker}(i_\#)$ <sup>1</sup>.

**Osservazione.**  $C_n(X, A)$  è sempre un gruppo abeliano libero, con base data da classi di  $n$ -simplessi singolari  $\sigma$  tali che  $\text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$ .

La mappa  $\partial$  di  $C(X)$  induce un morfismo di complessi  $\partial'$  su  $C_n(X, A)$ .

**Definizione 15** I gruppi di omologia di  $C_n(X, A)$  si indicano  $H_n(X, A)$  e si dicono *gruppi di omologia relativa* alla coppia  $(X, A)$ .

Dati  $X, Y$  spazi topologici,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  e  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  (cioè  $f(A) \subseteq B$ ), si ha una mappa indotta  $f_\# : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ , e quindi anche una mappa  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  in omologia.

Si è dunque mostrato che  $H$  (omologia relativa) è un funtore da  $Top(2)$  a  $Ab$  (dove  $Top(2)$  è la categoria delle coppie di spazi topologici).

Osserviamo che per una coppia  $(X, A)$  le mappa di inclusione  $C(A) \hookrightarrow C(X)$  e di proiezione al quoziente  $C(X) \rightarrow C(X, A)$  per come sono definite inducono la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow C(A) \hookrightarrow C(X) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

**Teorema 2.4** Data una coppia  $(X, A)$ , è esatta la successione lunga

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\omega} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente dal Teorema 1.2 applicato alla successione esatta corta riportata sopra.  $\square$

**Osservazione.** Più in generale: per una tripla  $B \subseteq A \subseteq X$  abbiamo la successione esatta corta indotta da inclusioni e proiezioni

$$0 \longrightarrow C(A, B) \hookrightarrow C(X, B) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

allora abbiamo in omologia la successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\omega} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \dots$$

Inoltre per  $B = \emptyset$  ritroviamo l'enunciato del Teorema 2.4.

<sup>1</sup>Si ricorda che dato un morfismo  $f : M \rightarrow M'$  tra  $R$ -moduli  $\text{coker}(f) := M'/f(M)$ .

**Osservazione.** L'omomorfismo di connessione è naturale, cioè se si ha un'altra coppia  $(Y, B)$  e mappe  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  allora è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

e lo stesso si ha nel caso di triple invece che coppie.

## 2.1 Primi Conti

In generale sarà impossibile svolgere in maniera diretta i conti, quindi trattiamo un caso facile, e poi diamo qualche strumento per i casi meno banali.

- Sia  $X = \{p\}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(X)$  è il gruppo libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari  $\Delta^n \rightarrow X$ , ma ce ne è uno solo, essendo il codominio un punto. Allora  $C_n(X) = \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Inoltre,  $\partial_{2n}$  è un isomorfismo per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , mentre  $\partial_{2n+1}$  è la mappa nulla per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (questi due fatti seguono subito usando la definizione di bordo), dunque il complesso di catene  $C(X)$  è della forma

$$0 \xleftarrow{\partial_0=0} \underbrace{C_0(X)}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial_1=0} \underbrace{C_1(X)}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial_2=Id} \underbrace{C_2(X)}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial_3=0} \underbrace{C_3(X)}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial_4=Id} \dots$$

dunque  $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}$ .

- Additività: se  $X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  è la scrittura di  $X$  come unione delle sue componenti connesse per archi, allora si ha

$$H_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} H_n(X_\alpha), \quad H_n(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} H_n(X_\alpha, A \cap X_\alpha)$$

(questo perché i simplessi sono mappe continue, dunque non possono “saltare” da una componente connessa ad un'altra. Segue subito quanto detto).

## 2.2 Omologia Ridotta

Abbiamo visto che anche nel caso più semplice in cui  $X$  sia un punto, in omologia abbiamo  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  che “conta” le componenti connesse per archi di  $X$ . Vorremmo però una struttura più semplice.

**Definizione 16** Sia  $X \neq \emptyset$ . Il *complesso delle catene singolari aumentato* è

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

dove  $\varepsilon$  è la *mappa di aumentazione* definita da  $\varepsilon(\sum_\sigma n_\sigma \sigma) = \sum_\sigma n_\sigma$ . L'*omologia ridotta* è l'omologia del complesso aumentato, la indichiamo con  $\tilde{H}_n(X)$ .

**Fatto 2.5**  $\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$ , e  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$  per ogni  $n > 0$ .

**Osservazione.** L'isomorfismo  $\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$  non è canonico, come si può vedere considerando uno spazio  $X$  non connesso per archi.

**Osservazione.** Il Fatto 2.5 si può dimostrare applicando il Teorema 1.2 sul morfismo di connessione alla successione esatta di complessi  $0 \rightarrow \mathbb{Z}[-1] \rightarrow \tilde{C}_*(X) \rightarrow C_*(X) \rightarrow 0$ .

**Osservazione.** Per una coppia, l'omologia ridotta e omologia "normale" coincidono, ovvero possiamo definire il complesso aumentato della coppia  $(X, A)$  come

$$\tilde{C}_*(X, A) := \tilde{C}_*(X)/\tilde{C}_*(A) \simeq C_*(X, A).$$

## 2.3 Mappe Omotope e Omotopia di Catene

Notazione: in tutte le dispense, a meno che venga detto diversamente,  $I$  indicherà l'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ .

Ricordiamo che due mappe  $f, g : X \rightarrow Y$  (continue) si dicono omotope se esiste  $F : X \times I \rightarrow Y$  (continua) tale che  $f(x) = F(x, 0)$  e  $g(x) = F(x, 1)$ .

**Cone Construction:** sia  $X$  contraibile per deformazione su  $x_0 \in X$  e sia  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$  morfismo di complessi di grado 0 con  $\varepsilon_n = 0$  per ogni  $n > 0$ , e  $\varepsilon_0(\sum n_\sigma \sigma) = (\sum n_\sigma)\sigma_0$ , dove  $\sigma_0 : \Delta^0 \rightarrow \{x_0\}$ .

Data  $h : X \times I \rightarrow X$  omotopia che realizza la contrazione su  $x_0$ , vogliamo costruire un'omotopia di catene  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tra  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Id_{C_*(X)} = \{Id_{C_n(X)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ & & \downarrow Id_n, \varepsilon_n & & \downarrow Id_{n-1}, \varepsilon_{n-1} & & & & \downarrow Id_1, \varepsilon_1 & & \downarrow Id_0, \varepsilon_0 & & \\ \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

$s_{n-1}$  (red arrow from  $C_n(X)$  to  $C_{n-1}(X)$ )  
 $s_{n-2}$  (red arrow from  $C_{n-1}(X)$  to  $C_{n-2}(X)$ )  
 $s_1$  (red arrow from  $C_2(X)$  to  $C_1(X)$ )  
 $s_0$  (red arrow from  $C_1(X)$  to  $C_0(X)$ )

Consideriamo la mappa  $q : \Delta^{n-1} \times I \rightarrow \Delta^n$  che proietta  $((v_0, \dots, v_{n-1}), t) \mapsto (t, (1-t)v_0, \dots, (1-t)v_{n-1})$  al quoziente la faccia  $\Delta^{n-1} \times \{1\}$  su un punto, "generando" un nuovo vertice.

Dato un  $(n-1)$ -simplesso singolare  $\sigma : \Delta^{n-1} \rightarrow X$  abbiamo che esiste un'unica  $s(\sigma) := s\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  (dato che  $q$  è una mappa quoziente) che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \times I & \xrightarrow{q} & \Delta^n \\ \sigma \times Id \downarrow & & \downarrow s\sigma \\ X \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

cioè  $h \circ (\sigma \times Id) = s\sigma \circ q$ . Inoltre vale  $s\sigma \circ d_0^n = \sigma$ , e per  $i > 0$  vale  $s\sigma \circ d_i^n = s(\sigma \circ d_{i-1}^{n-1})$ . Allora

$$\begin{array}{l} n > 1 : \partial_n(s\sigma) = s\sigma \circ d_0^n - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s\sigma \circ d_i^n = \sigma - s(\partial_{n-1}\sigma) \\ n = 1 : \partial_1(s\sigma) = \sigma - \sigma_0 \end{array} \implies \begin{array}{l} \partial_n(s\sigma) + s(\partial_{n-1}\sigma) = \sigma - 0 = (Id_n - \varepsilon) \\ \partial_1(s\sigma) + s(\partial_0\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (Id_0 - \varepsilon_0) \end{array}$$

dunque  $\partial s + s\partial = Id - \varepsilon$ , cioè  $s$  è un'omotopia di catene da  $Id$  a  $\varepsilon$ . In particolare, dalla Proposizione 1.3 e da quanto visto segue che:

**Proposizione 2.6** Se  $X$  è contraibile, allora  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  e  $H_n(X) = 0$  per ogni  $n > 0$ .

Vale in effetti un risultato più generale, per il quale si usa il seguente Lemma:

**Lemma 2.7** Siano  $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow X \times I$  date da  $\eta_i(x) = (x, i)$ , e siano  $(\eta_0)_\#$  e  $(\eta_1)_\#$  le relative mappe indotte sui complessi di catene. Esiste un'omotopia di catene naturale<sup>2</sup> tra  $(\eta_0)_\#$  e  $(\eta_1)_\#$ .

*Dimostrazione.* Vogliamo costruire un morfismo di catene  $S_n^X : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$  tale che:

$$(1) \partial S_n^X + S_{n-1}^X \partial = (\eta_1^X)_\# - (\eta_0^X)_\#$$

(2) sia naturale, cioè se  $f : X \rightarrow Y$  allora è commutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{S_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f \times Id)_\# \\ C_n(Y) & \xrightarrow{S_n^Y} & C_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

Se costruiamo un'omotopia del genere sui semplici, sapendo come agisce su  $\iota_n : \Delta^n \xrightarrow{Id} \Delta^n$  elemento di  $C_n(\Delta^n)$ , per naturalità si ottiene su tutto  $C_n(X)$  (basta usare  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  al posto della  $f$  sopra):

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta^n) & \xrightarrow{S_n^{\Delta^n}} & C_{n+1}(\Delta^n \times I) \\ \sigma_\# \downarrow & & \downarrow (\sigma \times Id)_\# \\ C_n(X) & \xrightarrow{S_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \end{array}$$

Costruiamo per induzione  $S_n^{\Delta^n}$  che rispetti (1) e (2), da cui come detto segue la tesi.

•  $n = 0$ : consideriamo  $S_0 : C_0(X) \rightarrow C_1(X \times I)$  che manda lo 0-simplesso  $\sigma : \Delta^0 \rightarrow \{x\}$  nell'1-simplesso  $S_0\sigma : \Delta^1 \rightarrow X \times I$ . Ma allora ( $\sigma$  è uno 0-simplesso, dunque  $\partial\sigma = 0$ ):

$$\partial(S_0\sigma) + S_0(\partial\sigma) = \partial(S_0\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} (S_0\sigma)d_0 - (S_0\sigma)d_1 = \eta_1^X\sigma - \eta_0^X\sigma$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene semplicemente osservando che rispettivamente  $(S_0\sigma)d_0 = \eta_1^X\sigma$  e  $(S_0\sigma)d_1 = \eta_0^X\sigma$  usando le definizioni delle applicazioni coinvolte. Dunque in particolare  $S_0$  rispetta (1). Dalla definizioni segue direttamente anche che  $S_0$  è naturale, cioè rispetta (2).

•  $n > 0$ : sia definita  $S_k$  che rispetta (1) e (2) per  $k < n$ . Vogliamo costruire  $S_n\iota_n \in C_{n+1}(\Delta^n \times I)$  che soddisfi

$$\partial(S_n\iota_n) = \eta_1^{\Delta^n}\iota_n - \eta_0^{\Delta^n}\iota_n - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n.$$

Mostriamo che il membro di destra è un ciclo, cioè che applicando  $\partial$  ottengo 0:

$$\begin{aligned} \partial(\eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n) &= \eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \partial S_{n-1}^{\Delta^n}(\partial\iota_n) \stackrel{hp.ind.}{=} \\ &= \eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - (\eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - S_{n-2}^{\Delta^n}\partial\partial\iota_n) = 0 \end{aligned}$$

inoltre poiché  $\Delta^n \times I$  è contraibile si ha  $H_n(\Delta^n \times I) = 0$  (siamo nelle ipotesi  $n > 0$ ), cioè ogni  $n$ -ciclo è anche  $n$ -bordo, quindi esiste  $a \in C_{n+1}(\Delta^n \times I)$  tale che  $\partial a = \eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n$ . Poniamo dunque  $S_n(\iota_n) = a$ , e in generale per  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X \times I$  poniamo  $S_n(\sigma) = (\sigma \times Id)_\# a$ . Ora:

$$\begin{aligned} \partial S_n(\sigma) &= \partial(\sigma \times Id)_\# a = (\sigma \times Id)_\# \partial a = (\sigma \times Id)_\# (\eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n) = \\ &= \eta_1\sigma_\#\iota_n - \eta_0\sigma_\#\iota_n - S_{n-1}\sigma_\#\partial\iota_n = \eta_1\sigma - \eta_0\sigma - S_{n-1}\partial\sigma \end{aligned}$$

cioè  $S_n$  rispetta (1). Infine:

$$(f \times Id)_\# S_n\sigma = (f \times Id)_\# (\sigma \times Id)_\# a = ((f \circ \sigma) \times Id)_\# a = S_n(f\sigma) = S_n f_\#\sigma$$

cioè  $S_n$  rispetta (2). □

<sup>2</sup>cioè se ci sono mappe continue, l'omotopia commuta con le mappe indotte.

**Teorema 2.8** Mappe omotope inducono morfismi di catene omotopi.

*Dimostrazione.* Siano  $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow X \times I$  date da  $\eta_i(x) = (x, i)$ , e siano  $(\eta_0)_\#$  e  $(\eta_1)_\#$  le relative mappe indotte sui complessi di catene. Siano inoltre  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  mappe omotope tramite un'omotopia  $h$ . In maniera ovvia è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 X & & Y \\
 \eta_0^X \searrow & \xrightarrow{f_0} & \nearrow \\
 & X \times I \xrightarrow{h} & \\
 \eta_1^X \nearrow & \xrightarrow{f_1} & 
 \end{array}$$

Per mostrare che  $f_0$  e  $f_1$  inducono morfismi di catene omotopi basta mostrare che  $(\eta_0^X)_\#$  e  $(\eta_1^X)_\#$  sono omotopi come morfismi  $C(X) \rightarrow C(X \times I)$ . La tesi segue dunque direttamente dal Lemma 2.7.  $\square$

Mettendo insieme i risultati della Proposizione 1.3 e del Teorema 2.8 abbiamo:

**Corollario 2.9** Mappe omotope inducono la stessa mappa in omologia. In particolare, l'omologia è un invariante omotopico.

**Corollario 2.10** Se esiste  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica, allora  $H(X)$  è isomorfo a  $H(Y)$ .

## 2.4 Successione di Mayer-Vietoris

Consideriamo uno spazio  $X$  che si decompone in  $X = A \cup B$ . Ci sono le mappe indotte dalle inclusioni:

$$\begin{aligned}
 i_* : H(A \cap B) &\rightarrow H(A), & j_* : H(A \cap B) &\rightarrow H(B) \\
 k_* : H(A) &\rightarrow H(X), & l_* : H(B) &\rightarrow H(X)
 \end{aligned}$$

e possiamo considerare le mappe

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi : H(A \cap B) &\rightarrow H(A) \oplus H(B) & \psi : H(A) \oplus H(B) &\rightarrow H(X) \\
 x &\mapsto (i_*(x), j_*(x)) & (u, v) &\mapsto k_*(u) - l_*(v)
 \end{array}$$

**Teorema 2.11** (Mayer-Vietoris) Siano  $A, B \subseteq X$  tali che  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . Allora esiste un omomorfismo  $\Delta : H(X) \rightarrow H(A \cap B)$  naturale di grado  $-1$  tale che la seguente successione è esatta:

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots$$

Inoltre se  $A \cap B \neq \emptyset$  allora la successione è esatta anche in omologia ridotta.

*Dimostrazione.* Per la seguente dimostrazione si fa uso di risultati che si vedranno più avanti (in particolare la Proposizione 2.25 e il Teorema 2.29).

Consideriamo  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . Vale  $C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(B)$  (con la somma che non è diretta). Possiamo allora considerare la successione

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \longrightarrow C(A) \oplus C(B) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(B) \longrightarrow 0$$

che per l'uguaglianza detta è esatta (il nucleo della seconda mappa è proprio  $C(A \cap B)$ ). Segue la successione esatta lunga in omologia

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

per il Teorema 2.29 si ha  $H_n^U(X) \simeq H_n(X)$ , cioè abbiamo la successione esatta

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

che è la tesi. In particolare si è trovato che  $\Delta$  è naturale, visto che l'isomorfismo tra  $H_n^U(X)$  e  $H_n(X)$  è indotto dalla suddivisione baricentrica  $\mathcal{B}$ , che è naturale.  $\square$

**Fatto 2.12** Il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris) ha il seguente enunciato in omologia relativa:

Siano  $Y \subseteq X$ ,  $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ ,  $Y = \mathring{C} \cup \mathring{D}$  con  $C \subseteq A$ ,  $D \subseteq B$ . Allora esiste  $\Delta : H(X, Y) \rightarrow H(A \cap B, C \cap D)$  omomorfismo di grado  $-1$  tale che la seguente successione è esatta:

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X, Y) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots$$

La dimostrazione del Fatto 2.12 è analoga a quella del Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris), usando gli analoghi risultati nel caso dell'omologia relativa.

### 2.4.1 Conseguenze del Teorema di Mayer-Vietoris

Riportiamo qua alcuni risultati che seguono dal Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris):

**Teorema 2.13** (Omologia delle Sfere)  $\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ , cioè per  $n > 0$   $H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases}$

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione:

*Passo Base:* per  $n = 0$ ,  $S^0 = \{1, -1\}$ , dunque  $C_i(S^0) = \mathbb{Z}^2$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . In particolare ogni  $i$ -simplexso singolare è un simplexso costante. Si verifica facilmente che  $\partial_i$  è un isomorfismo se  $i$  pari ed è invece la mappa nulla se  $i$  dispari. Passando all'omologia si ottiene la tesi.

*Passo induttivo:* siano  $P, Q$  punti distinti di  $S^{n+1}$ ,  $A = S^{n+1} \setminus \{P\}$  e  $B = S^{n+1} \setminus \{Q\}$ . Allora ovviamente  $S^{n+1} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ . Vale inoltre  $A \simeq \mathbb{R}^{n+1} \simeq B$  e  $A \cap B \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \sim S^n$ , dunque  $\tilde{H}_i(A) = 0 = \tilde{H}_i(B)$  per ogni  $i$ , e per ipotesi induttiva  $\tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ .

Utilizzando il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris), è esatta la successione

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(A) \oplus \tilde{H}_{i+1}(B) \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \dots$$

e il primo e l'ultimo termine sono nulli per quanto detto. Dunque  $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) = \tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n)$ .  $\square$

**Corollario 2.14**  $S^n$  non è contraibile a un punto.

**Proposizione 2.15**  $D^{n+1}$  non si può retrarre su  $S^n$ .

*Dimostrazione.* Se si potesse retrarre  $D^{n+1}$  su  $S^n$ , diciamo con una retrazione  $r$ , avremmo

$$S^n \xrightarrow{i} D^{n+1} \xrightarrow{r} S^n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Id}$

da cui in omologia:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Id}$

che è assurdo (ovviamente non si può fattorizzare  $Id : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  passando da 0).  $\square$

**Proposizione 2.16** Sia  $n \geq 1$ . Allora  $H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Usiamo la successione esatta della coppia in omologia ridotta:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(D^n) \longrightarrow \dots$$

ed essendo che il primo e l'ultimo elemento sono 0 ( $D^n$  è contraibile), per esattezza abbiamo che  $H_i(D^n, S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ , che dà la tesi usando il Teorema 2.13 (Omologia delle Sfere).  $\square$

**Teorema 2.17** (Punto Fisso di Brouwer)  $f : D^n \rightarrow D^n$  continua ha almeno un punto fisso.

*Dimostrazione.* Se fosse  $f(x) \neq x$  per ogni  $x \in D^n$ , ne deduciamo la retrazione di  $D^n$  su  $S^{n-1}$  data da

$$\{r(x)\} = \{f(x) + t(x - f(x))\} \cap \partial D^n$$

assurdo per la Proposizione 2.15.  $\square$

**Definizione 17** Data  $f : S^n \rightarrow S^n$  esiste un unico  $d \in \mathbb{Z}$  tale che la mappa indotta in omologia

$$f_* : \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}}$$

è la moltiplicazione per  $d$ . Tale  $d$  è detto *grado* di  $f$ .

**Fatto 2.18** 1.  $f_1, f_2 : S^n \rightarrow S^n$  omotope hanno stesso grado.

2. Il grado della composizione di mappe è il prodotto dei gradi.

3. Data  $f : S^n \rightarrow S^n$ ,  $f$  e  $\Sigma f$  (sospensione<sup>3</sup> di  $f$ ) hanno stesso grado.

4.  $Id : S^n \rightarrow S^n$  ha grado 1,  $f : S^n \rightarrow S^n$  costante ha grado 0,  $f : S^0 \rightarrow S^0$  ha grado 0, 1 oppure  $-1$ .

5.  $v : S^n \rightarrow S^n$  riflessione rispetto ad un iperpiano per l'origine ha grado  $-1$ .

6. la mappa antipodale  $S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $(-1)^{n+1}$ .

7.  $f : S^n \rightarrow S^n$  senza punti fissi ha grado  $(-1)^{n+1}$ .

**Teorema 2.19**  $S^n$  ammette un campo tangente (cioè  $f(x) \cdot x = 0$  per ogni  $x$ ) mai nullo  $\iff n$  è dispari.

*Dimostrazione.* Per  $n$  dispari basta considerare il campo  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{n+1}, -x_n)$ . Se invece  $n$  pari, supponiamo per assurdo che esista un campo vettoriale tangente mai nullo. Considero allora  $h : S^n \times I \rightarrow S^n$  data da  $h(x, t) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}$ , omotopia tra  $h_0 = Id_{S^n}$  e  $h_1$  mappa senza punti fissi. Ma  $Id_{S^n}$  ha grado 1,  $h_1$  ha grado  $(-1)^{n+1} = -1$ , assurdo.  $\square$

<sup>3</sup>La sospensione di  $X$  spazio topologico è  $\Sigma X = X \times I / \sim$ , dove  $(x, 0) \sim (x', 0)$  e  $(x, 1) \sim (x', 1)$  per ogni  $x, x' \in X$ . La sospensione di una mappa  $f$  è  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  data da  $\Sigma f([(x, t)]) = [(f(x), t)]$ . Osservare che  $\Sigma S^n = S^{n+1}$ .



## 2.5 Legame tra Primo Gruppo di Omologia e Gruppo Fondamentale

Ricordiamo che l'1-simplesso standard è  $\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 : t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\}$ , e dato uno spazio topologico  $X$  un 1-simplesso singolare è una mappa  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ . Ogni coppia in  $\Delta^1$  è univocamente identificata dal primo valore, quindi in maniera ovvia  $\Delta^1 \simeq [0, 1]$ .

Possiamo identificare un 1-simplesso singolare  $\sigma$  con il cammino  $I \xrightarrow{\gamma} X$ ,  $t \mapsto \sigma(1-t, t)$ , e possiamo identificare il cammino inverso  $\gamma^-$  con  $\sigma^-(t_0, t_1) = \sigma(t_1, t_0)$ . Rimane definita anche la nozione di "giunzione di 1-simplessi singolari", che si costruisce nel seguente modo: dati  $\sigma, \tau$  tali che  $\sigma(0, 1) = \tau(1, 0)$ , si pone

$$(\sigma * \tau)(t_0, t_1) = \begin{cases} \sigma(2t_0 - 1, 2t_1) & \text{se } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t_0, 2t_1 - 1) & \text{se } t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dati due 1-simplessi singolari  $\sigma, \tau$  con  $\sigma(0, 1) = \tau(1, 0)$ , consideriamo la mappa

$$\omega : \begin{array}{ccc} \Delta^2 & \rightarrow & X \\ (t_0, t_1, t_2) & \mapsto & (\sigma * \tau)(t_0 + \frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2} + t_2) \end{array}$$

**Fatto 2.20** Vale che<sup>4</sup>  $\partial\omega = \sigma - \sigma * \tau + \tau$ , cioè in omologia  $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$ .

Costruiamo una mappa  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ : dato  $\gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ , possiamo associargli l'1-simplesso  $\sigma_\gamma : \begin{array}{ccc} \Delta^1 & \rightarrow & X \\ (t, 1-t) & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$ . Allora rimane definita una mappa

$$h' : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & C_1(X) \\ \gamma & \mapsto & \sigma_\gamma \end{array}$$

**Fatto 2.21** Tramite la mappa appena definita  $\gamma_1 * \gamma_2 \xrightarrow{h'} \sigma_{\gamma_1} * \sigma_{\gamma_2}$ .

**Proposizione 2.22** Cammini omotopi a estremi fissi vanno tramite  $h'$  in semplici singolari omologhi.

*Dimostrazione.* Data  $K : \Delta^1 \times I \rightarrow X$  omotopia a estremi fissi tra due cammini  $k_0 = K(\cdot, 0)$  e  $k_1 = K(\cdot, 1)$ , questa si fattorizza tramite la mappa

$$Q : \begin{array}{ccc} \Delta^1 \times I & \rightarrow & \Delta^2 \\ (t_0, t_1, t) & \mapsto & (t_0, t_1(1-t), t_1 t) \end{array}$$

che contrae uno dei lati costanti di  $K$  in un unico punto:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{k_1} & \bullet \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x_0 \\ \bullet & \xrightarrow{k_0} & \bullet \end{array} & \xrightarrow{Q} & \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & \searrow k_1 & \\ \bullet & \xrightarrow{k_0} & \bullet \end{array} \end{array}$$

Ciò induce una  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times I & \xrightarrow{K} & X \\ Q \downarrow & \searrow \sigma & \uparrow \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

<sup>4</sup>Si tratta di usare le definizioni delle mappe  $d_i$ , di  $\sigma * \tau$  e sfruttare che  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ .

inoltre  $\partial\sigma = x_0 - k_0 + k_1$ , dunque in omologia, poiché  $[x_0]$  è la classe banale<sup>5</sup>, otteniamo  $[k_0] = [k_1]$ .  $\square$

Dunque la mappa  $h'$  sopra definita manda loop omotopi nello stesso elemento di  $H_1$ , vale a dire che  $h'$  è una ben definita mappa  $\pi_1 \rightarrow H_1$ . Inoltre, dal Fatto 2.21 segue che  $h'$  è anche un omomorfismo. Infine, poiché  $H_1$  è un gruppo abeliano, sappiamo che  $h'$  si fattorizza su  $\pi_1^{Ab}$ , cioè esiste un omomorfismo  $h : \pi_1(X, x_0)^{Ab} \rightarrow H_1(X)$  tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h'} & H_1(X) \\ \text{Ab} \downarrow & & \nearrow \\ \pi_1(X, x_0)^{Ab} & \xrightarrow{h} & \end{array}$$

**Teorema 2.23** Se  $X$  è connesso per archi allora  $h$  è un isomorfismo, cioè  $H_1(X) \simeq \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $h$  ha un'inversa sinistra: per ogni  $x \in X$  sia  $u_x$  cammino da  $x_0$  a  $x$ . Dato  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$  e detti  $\sigma_0 = \sigma(0, 1)$ ,  $\sigma_1 = \sigma(1, 0)$ , associo a  $\sigma$  il loop  $u_{\sigma_0} * \sigma * u_{\sigma_1}^- \in \pi_1(X, x_0)$ . Estendiamo per linearità ad un omomorfismo  $l' : C_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ . Mostriamo che  $l'$  passa al quoziente (rispetto ai bordi): sia  $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$  con facce  $\tau_i = \tau \circ d_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Poiché  $\Delta^2$  è contraibile,  $\tau_1$  è omotopo a  $\tau_2 * \tau_0$ . Allora

$$l'(\tau_2) + l'(\tau_0) = l'(\tau_2 + \tau_0) = l'(\tau_2 * \tau_0) = l'(\tau_1)$$

cioè  $l'(\partial\tau) = l'(\tau_0) - l'(\tau_1) + l'(\tau_2) = 0$  e  $l'$  passa al quoziente:

$$\begin{array}{ccc} C_1(X) & \xrightarrow{l'} & \pi_1(X, x_0)^{Ab} \\ \downarrow & & \nearrow \\ C_1(X)/B_1(X) & \xrightarrow{l''} & \end{array}$$

Poiché  $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) \subseteq C_1(X)/B_1(X)$  è indotta anche una  $l : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ . Per costruzione,  $l \circ h = Id_{\pi_1(X, x_0)^{Ab}}$ .

Per concludere basta dunque mostrare che  $h$  è suriettiva: fissiamo un ciclo  $\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in Z_1(X)$ . Poiché è un ciclo  $\sum_{i=1}^n a_i ((\sigma_i)_1 - (\sigma_i)_0) = 0$ , dunque in particolare anche  $\sum_{i=1}^n a_i ([u_{(\sigma_i)_0}] - [u_{(\sigma_i)_1}]) = 0$ , allora

$$\sum_{i=1}^n a_i [\sigma_i] = \sum_{i=1}^n a_i ([u_{\sigma_{i0}}] + [\sigma_i] - [u_{\sigma_{i1}}]) = \sum_{i=1}^n a_i [u_{\sigma_{i0}} * \sigma_i * u_{\sigma_{i1}}^-] \in \text{Im}(h)$$

$\square$

## 2.6 Suddivisioni Baricentriche

Lavoriamo, in questa sezione, su  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 18** Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e  $v_0, \dots, v_p \in D$ . Un *simplexso singolare affine* di vertici  $v_0, \dots, v_p$  è una mappa della forma

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \Delta^p & \rightarrow & D \\ \sum \lambda_i e_i & \mapsto & \sum \lambda_i v_i \end{array}$$

Indichiamo  $\sigma$  con  $[v_0, \dots, v_p]$ .

---

<sup>5</sup>1-simplexsi banali sono bordi

Notazione:  $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]$  è il  $p - 1$ -simpleso affine ottenuto omettendo il vertice  $i$ .

**Osservazione.**  $\partial[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_p] \circ d_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]$ .

Sia  $D$  convesso. Per ogni  $v \in D$  abbiamo un'omotopia di contrazione  $D \times I \rightarrow D$   
 $x \mapsto (1-t)x + tv$   
 che induce (per la Cone Construction) un'omotopia di catene tra  $Id$  e  $\varepsilon$ <sup>6</sup>:

$$\begin{array}{ccc} C_p(D) & \rightarrow & C_{p+1}(D) \\ \sigma & \mapsto & v\sigma \end{array}$$

dove si è posto, per  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ ,

$$v\sigma := [v, v_0, \dots, v_p] \in C_{p+1}(D) \quad (2.1)$$

**Fatto 2.24** Per  $\sigma \in C_p(X)$  vale che  $\partial(v\sigma) = \begin{cases} \sigma - \varepsilon(\sigma)[v] & \text{se } p = 0 \\ \sigma - v \cdot \partial(\sigma) & \text{se } p > 0 \end{cases}$ .

**Definizione 19** Il *baricentro* di  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$  è  $\sigma^\beta = \frac{1}{p+1} \sum v_i$ . Inoltre, definiamo induttivamente la *mappa di suddivisione baricentrica*

$$\mathcal{B}_p(X) = \mathcal{B}_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$$

che manda il  $p$ -simpleso  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  in  $\mathcal{B}_p(\sigma) = \sigma_{\#} \mathcal{B}_p(\iota_p)$ , dove

$$\mathcal{B}_p(\iota_p) = \begin{cases} \iota_0 & p = 0 \\ \iota_p^\beta \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p) & p > 0 \end{cases}$$

(dove  $\iota_p$  è l'identità di  $\Delta^p$ ).

**Proposizione 2.25**  $\mathcal{B}_p$  è una mappa di catene naturale che è omotopa all'identità.

*Dimostrazione.* Naturalità: dalle definizioni si ha

$$f_{\#} \mathcal{B}_p(\sigma) = f_{\#} \sigma_{\#} \mathcal{B}_p(\iota_p) = (f\sigma)_{\#} \mathcal{B}_p(\iota_p) = \mathcal{B}_p(f\sigma) = \mathcal{B}_p(f_{\#} \sigma)$$

Mappa di catene: facciamo un'induzione. *Passo base:* per  $p = 1$  abbiamo (usiamo il Fatto 2.24)

$$\partial \mathcal{B}_1(\iota_1) = \partial(\iota_1^\beta \cdot \mathcal{B}_0(\partial \iota_1)) = \mathcal{B}_0(\partial \iota_1) - \iota_1^\beta \partial \mathcal{B}_0(\partial \iota_1) = \mathcal{B}_0(\partial \iota_1)$$

*Passo Induttivo:* usando il Fatto 2.24 e l'ipotesi induttiva

$$\partial \mathcal{B}_p(\iota_p) = \partial(\iota_p^\beta \cdot \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p)) \stackrel{F.2.24}{=} \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p) - \iota_p^\beta \cdot \partial \mathcal{B}_{p-1}(\iota_p) = \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p) - \iota_p^\beta \cdot \mathcal{B}_{p-2}(\partial^2 \iota_p) = \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p)$$

da cui, usando la naturalità, si ottiene  $\partial \mathcal{B}(\sigma) = \mathcal{B}(\partial \sigma)$  per  $\sigma$  simpleso generico.

Per dimostrare che sia omotopa all'identità facciamo uso di un risultato più generale (Teorema 2.26) che useremo anche più avanti.  $\square$

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $\mathcal{CH}_+$  la categoria dei complessi di catene singolari di gruppi abeliani  $(C_n, d_n)$ , con  $C_n = 0$  per  $n < 0$ .

<sup>6</sup>Si ricorda che  $\varepsilon$  è il morfismo di complessi dato da  $\varepsilon_n = 0$  per  $n > 0$ ,  $C_0(X) \ni \sum n_\sigma \sigma \xrightarrow{\varepsilon_0} (\sum n_\sigma)[v]$  dove, secondo la notazione introdotta,  $[v]$  è lo 0-simpleso  $1 \mapsto v$ .

**Definizione 20** Un funtore  $F_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  si dice *libero* se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste una famiglia  $\{(B_{n,j}, b_{n,j}) : j \in J(n)\}$  di oggetti  $B_{n,j}$  di  $\mathcal{C}$  (detti *modelli*) e oggetti  $b_{n,j} \in F_n(B_{n,j})$  tali che per ogni  $X$  oggetto di  $\mathcal{C}$  una base di  $F_n(X)$  (come gruppo abeliano libero) è data da

$$\{F_n(f)(b_{n,j}) : j \in J(n), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B_{n,j}, X)\}$$

**Esempio 2** Catene singolari:  $\mathcal{C} = \text{Top}$ ,  $F_n = C_n$ ,  $B_n = \Delta^n$ ,  $b_n = \iota_n \in C_n(\Delta^n)$ . Una base di  $C_n(X)$  è

$$\{\sigma : \sigma = \sigma_{\#} \iota_n = C_n(\sigma)(\iota_n) \text{ } n\text{-simplexso singolare}\}$$

**Definizione 21** Un funtore  $G_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  si dice *aciclico* rispetto alla famiglia di modelli  $\{B_{n,j}\}_{j \in J(n)}$  se  $H_n(G_*(B_{n,j})) = 0$  per ogni  $n > 0$  e ogni modello  $B_{n,j}$ .

**Definizione 22** Date  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorie e  $F, G$  funtori covarianti  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , una trasformazione naturale tra  $F$  e  $G$  è una funzione  $\varphi$  dagli oggetti di  $\mathcal{C}$  ai morfismi di  $\mathcal{D}$  tale che per ogni  $f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{C}$  è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \varphi(X) \downarrow & & \downarrow \varphi(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Nel caso in cui  $F$  e  $G$  siano controvarianti, cambia il verso delle mappe orizzontali.

**Teorema 2.26** Siano  $F_*, G_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  funtori rispettivamente libero e aciclico rispetto alla famiglia di modelli di  $F_*$ . Allora:

1. per ogni trasformazione naturale  $\bar{\varphi} : H_0 \circ F_* \rightarrow H_0 \circ G_*$  esiste una trasformazione naturale  $\varphi_* : F_* \rightarrow G_*$  che induce  $\bar{\varphi}$
2. due trasformazioni naturali  $\varphi, \psi$  con questa proprietà (di indurre  $\bar{\varphi}$ ) sono omotope.

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\varphi_n, \psi_n$  sono determinate dalle loro immagini su  $F_n(f)(b_{n,j})$  (sono base).

Procediamo induttivamente. *Passo Base:*  $\varphi_0$  è determinata se per ogni  $b_{0,j}$  scegliamo un  $\varphi(b_{0,j})$  che rappresenti la classe di omologia di  $\bar{\varphi}(b_{0,j}) \in H_0(G(B_{0,j}))$ .

*Passo Induttivo:* sia  $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$  trasformazione naturale che commuta con le mappe di bordo:

$$d_i^G \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ d_i^F \quad \text{per } 0 < i < n \quad (2.2)$$

Consideriamo  $\varphi_{n-1} d_n^F(b_{n,j}) \in G_{n-1}(B_{n-1,j})$ : per  $n = 1$  questa è la classe nulla, in quanto  $\varphi_0$  è definita per mandare a 0 tutti i bordi. Per  $n > 1$  invece si ha

$$d_{n-1}^G(\varphi_{n-1} d_n^F(b_{n,j})) = (d_{n-1}^G \varphi_{n-1}) d_n^F(b_{n,j}) \stackrel{(2.2)}{=} \varphi_{n-2} d_{n-1}^F d_n^F(b_{n,j}) = 0$$

cioè  $\varphi_{n-1} d_n^F(b_{n,j})$  è un ciclo. Ma  $G$  è aciclico, cioè  $H_{n-1}(G_*(B_{n,j})) = 0$ , cioè  $\varphi_{n-1} d_n^F(b_{n,j})$  è anche un bordo, dunque esiste  $g_{n,j} \in G_n(B_{n,j})$  tale che  $d_n^G(g_{n,j}) = \varphi_{n-1} d_n^F(b_{n,j})$ . Poniamo allora  $\varphi_n(b_{n,j}) = g_{n,j}$ . Segue come voluto che

$$d_n^G \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n^F \quad (2.3)$$

(per costruzione vale sui  $b_{n,j}$ , per naturalità vale ovunque). Si è definito  $\varphi$  a partire da  $\bar{\varphi}$ .

Resta dunque da mostrare che due trasformazioni  $\varphi, \psi$  che inducono  $\bar{\varphi}$  sono omotope. Costruiamo l'omotopia per induzione: siano  $\varphi_n, \psi_n$  costruite come sopra.

*Passo Base:* poiché  $\varphi_0(b_{0,j})$  e  $\psi_0(b_{0,j})$  sono nella stessa classe (inducono la stessa mappa  $\bar{\varphi}$  in omologia) esiste un  $c_{1,j} \in G_1(B_{0,j})$  tale che

$$\varphi_0(b_{0,j}) - \psi_0(b_{0,j}) = d_1^G(c_{1,j})$$

Definiamo allora  $S_0 : F_0 \rightarrow G_1$  data da  $S_0(b_{0,j}) = c_{1,j}$ , e per naturalità  $S_0$  è definita su tutto  $F_0$ .

*Passo Induttivo:* supponiamo ora di aver già definito  $S_i : F_i \rightarrow G_{i+1}$  per  $0 \leq i < n$  tale che

$$d_{i+1}^G S_i + S_{i-1} d_i^F = \psi_i - \varphi_i$$

Allora abbiamo (usiamo l'equazione (2.3) e la relazione appena scritta con  $i = n - 1$ )

$$d_n^G(\psi_n - \varphi_n - S_{n-1} d_n^F) = \psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - (\psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - S_{n-1} d_{n-1}^F d_n^F) = 0$$

e poiché  $G$  è aciclico esiste  $c_{n+1,j} \in G_{n+1}(B_{n,j})$  tale che  $d_{n+1}^G c_{n+1,j} = (\psi_n - \varphi_n - S_{n-1} d_n^F)(b_{n,j})$ , e possiamo definire  $S_n : F_n \rightarrow G_{n+1}$ ,  $S_n(b_{n,j}) = c_{n+1,j}$ . Segue  $d_{n+1}^G S_n + S_{n-1} d_n^F = \psi_n - \varphi_n$ .  $\square$

Prendendo  $F_* = G_* = C_n$  catene singolari, abbiamo che  $\varphi = Id$ ,  $\psi = \mathcal{B}$  inducono  $\bar{\varphi} = Id$  su  $H_0$ . Allora per il Teorema 2.26 (punto 2.)  $\mathcal{B}$  è omotopa all'identità, che è quello che ci mancava di mostrare per concludere la dimostrazione della Proposizione 2.25.

### 2.6.1 Ricoprimenti e Simplesse $\mathcal{U}$ -piccoli

Sia  $\mathcal{U}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  le cui parti interne ricoprono  $X$ .

**Definizione 23** Un sempliceo singolare  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  si dice  $\mathcal{U}$ -piccolo se ha immagine contenuta in un elemento di  $\mathcal{U}$ . Indichiamo con  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  il sottogruppo di  $C_n(X)$  generato dai semplici singolari  $\mathcal{U}$ -piccoli.

**Osservazione.** Il bordo del complesso  $C(X)$  manda  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  in  $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ , cioè i gruppi  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  formano un complesso di catene. Ne segue che è ben definita l'omologia  $H^{\mathcal{U}}(X)$ .

**Lemma 2.27** Sia  $\Delta = [v_0, \dots, v_p]$  un sempliceo affine. Allora il diametro di ogni sempliceo di  $\mathcal{B}(\Delta)$  è al più  $\frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione. *Passo Base:* per  $p = 0$  non c'è niente da dimostrare.

*Passo Induttivo:* sia  $\Delta'$  un sempliceo di  $\mathcal{B}(\Delta)$ , dunque in particolare un vertice di  $\Delta'$  è  $b$ . Chiamiamo  $w_1, \dots, w_p$  gli altri vertici. Ci sono due possibilità:

- i. Lo spigolo più lungo di  $\Delta'$  non contiene  $b$ , cioè è contenuto in una faccia  $D$  di  $\Delta$ . Ma allora è uno spigolo di un sempliceo della suddivisione di  $D$ , dunque sfruttando l'ipotesi induttiva

$$\text{diam}(\Delta') \leq \frac{p-1}{p} \text{diam}(D)$$

Inoltre  $\frac{p-1}{p} \leq \frac{p}{p+1}$  e  $\text{diam}(D) \leq \text{diam}(\Delta)$ , allora  $\text{diam}(\Delta') \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$ .

- ii. Lo spigolo più lungo di  $\Delta'$  contiene  $b$ , senza perdita di generalità sia tale spigolo  $\overline{bw_1}$ . Necessariamente  $w_1$  deve essere un vertice di  $\Delta$ , altrimenti non sarebbe alla massima distanza dal baricentro  $b$ . Detta dunque  $\Delta^1$  la faccia di  $\Delta$  che non contiene  $w_1$  e detto  $b^1$  il suo baricentro, si ha  $b = \frac{1}{p+1} w_1 + \frac{p}{p+1} b^1$ , da cui

$$\text{diam}(\Delta') = \|\overline{bw_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \|\overline{b^1 w_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$$

Si è dunque concluso in entrambi i casi.  $\square$

**Lemma 2.28** Dato  $\mathcal{U}$  ricoprimento di  $X$  e  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  simpleso singolare esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che ogni simpleso singolare di  $\mathcal{B}^k(\sigma)$  ha immagine contenuta in un elemento di  $\mathcal{U}$ .

*Dimostrazione.*  $\{\sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}) : U \in \mathcal{U}\}$  è un ricoprimento aperto di  $\Delta^p$ , sia  $\varepsilon > 0$  il suo numero di Lebesgue. Allora basta scegliere  $k$  tale che  $\frac{p^k}{(p+1)^k} \cdot \text{diam}([e_0, \dots, e_p]) < \varepsilon$ , poi si ottiene la tesi dal Lemma 2.27.  $\square$

**Teorema 2.29** L'inclusione  $C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione. Iniettività:* sia  $a \in C_i^{\mathcal{U}}(X)$  un ciclo (dunque  $\partial a = 0$ ) tale che  $[a] \mapsto [a] = [0] \in H_i(X)$ , quindi esiste  $b \in C_{i+1}(X)$  tale che  $\partial b = a$  (altrimenti  $[a] \neq [0]$  in  $H_i(X)$ , contro quanto ipotizzato).

Per il Lemma 2.28 esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathcal{B}^k(b) \in C_{i+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Sia  $T_k$  l'omotopia tra  $\mathcal{B}^k$  e  $Id$  (che esiste per la Proposizione 2.25). Dunque abbiamo che

$$\mathcal{B}^k(b) - b = T_k(\partial b) + \partial T_k(b) = T_k(a) + \partial T_k(b)$$

e prendendo il bordo  $\partial \mathcal{B}^k(b) - \partial b = \partial T_k(a) + \partial^2 T_k(b)$ , cioè

$$\partial \mathcal{B}^k(b) - a = \partial T_k(a) \implies a = \partial \mathcal{B}^k(b) - \partial T_k(a)$$

cioè  $a$  è differenza di bordi di elementi  $\mathcal{U}$ -piccoli (il primo lo è per costruzione, il secondo perché  $a$  lo è e  $T_k$  è naturale), cioè era  $[a] = [0] \in H_i^{\mathcal{U}}(X)$  e quindi la mappa è iniettiva.

*Suriettività:* sia  $a \in Z_n(C)$ , per il Lemma 2.28 esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale  $\mathcal{B}^k(a) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Allora

$$\mathcal{B}^k(a) - a = T_k(\partial a) + \partial T_k(a) = \partial T_k(a)$$

cioè  $\mathcal{B}^k(a)$  è omologo ad  $a$ , dunque  $[\mathcal{B}^k(a)] \mapsto [a]$  e la mappa è suriettiva.  $\square$

Useremo il seguente risultato, che dovrebbe essere stato visto in altri corsi:

**Lemma 2.30** (Lemma dei Cinque) Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

con le righe esatte,  $f_1$  suriettiva,  $f_5$  iniettiva,  $f_2$  e  $f_4$  isomorfismi, si ha che anche  $f_3$  è un isomorfismo.

**Teorema 2.31** L'inclusione  $i : C^{\mathcal{U}}(X, A) \hookrightarrow C(X, A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente diagramma commutativo tra successioni esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove  $\mathcal{U} \cap A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ . Segue il diagramma di successioni esatte lunghe in omologia

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ne segue dal Lemma 2.30 (Lemma dei Cinque) che la mappa verticale in mezzo è un isomorfismo, dato che le altre mappe sono isomorfismi per il Teorema 2.29.  $\square$

## 2.7 Omologia Relativa

### 2.7.1 Teorema Escissione

**Definizione 24** Due mappe  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sono omotope come mappe di coppie se l'omotopia  $F$  tra  $f$  e  $g$  rispetta  $F(A \times I) \subseteq B$ .

**Teorema 2.32** Siano  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  omotope come mappe di coppie. Allora  $f$  e  $g$  inducono lo stesso omomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Poiché le mappe  $f, g : X \rightarrow Y$  sono omotope, esiste un'omotopia di catene  $H : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  tra  $f_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  e  $g_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  tale che  $\partial H - H\partial = f_* - g_*$ . Chiamiamo  $f'$  e  $g'$  le restrizioni di  $f$  e  $g$  da  $A$  a  $B$ . Poiché  $f$  e  $g$  sono omotope come mappe di coppie, l'omotopia di catene  $H$  si restringe a un'omotopia  $H' : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(B)$  tra  $f'_* : C_n(A) \rightarrow C_n(B)$  e  $g'_* : C_n(A) \rightarrow C_n(B)$  tale che  $\partial H' - H'\partial = f'_* - g'_*$ . Di conseguenza  $H$  induce al quoziente un'omotopia di catene  $\bar{H}$  tra le mappe di catene relative  $\bar{f}_* : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$  e  $\bar{g}_* : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ .  $\square$

Vogliamo capire cosa misura l'omologia relativa  $H(X, A)$ . In un certo senso è legata a  $X \setminus A$  e  $X/A$ .

**Teorema 2.33** (di Escissione) Sia  $(X, A)$  coppia,  $W \subseteq A$  tale che  $\bar{W} \subseteq \mathring{A}$ . Allora la mappa di inclusione  $(X \setminus W, A \setminus W) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ , per cui  $\mathring{A} \cup (X \setminus W) = X$ . In particolare allora si ha  $C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(X \setminus W)$  (dove la somma non è diretta). Consideriamo il diagramma dato dalle inclusioni e il corrispettivo diagramma in omologia:

$$\begin{array}{ccc} C(X \setminus W, A \setminus W) & \longrightarrow & C(X, A) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & C^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} H_n(X \setminus W, A \setminus W) & \longrightarrow & H_n(X, A) \\ & \searrow f & \uparrow \simeq \\ & & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array}$$

dove la mappa verticale in omologia è un isomorfismo per il Teorema 2.31. Per concludere dunque basta provare che  $f$  è un isomorfismo. Ricordiamo che  $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ , dunque  $\mathcal{U} \cap A = A$ . Si ha:

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{U}}(X, A) &= C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n^{\mathcal{U} \cap A}(A) = (C_n(X \setminus W) + C_n(A))/C_n(A) = C_n(X \setminus W)/C_n(A) \cap C_n(X \setminus W) = \\ &= C_n(X \setminus W)/C_n(A \setminus W) = C_n(X \setminus W, A \setminus W) \end{aligned}$$

e passando al quoziente si trova l'isomorfismo cercato in omologia.  $\square$

**Definizione 25** Una coppia di spazi  $(X, A)$  con  $A$  chiuso di  $X$  si dice *buona coppia* se  $A$  è retratto di deformazione di un qualche suo intorno in  $X$ .

**Teorema 2.34** Data  $(X, A)$  buona coppia, la proiezione al quoziente  $(X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un intorno di  $A$  in  $X$  che si retrae per deformazione su  $A$ . Consideriamo il seguente diagramma (con le mappe orizzontali tutte indotte dalle inclusioni):

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{f_1} & H_n(X, V) & \xleftarrow{f_2} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q'_* & & \downarrow f_3 = q''_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{f_5} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{f_4} & H_n(X \setminus A/A, V \setminus A/A) \end{array}$$

vogliamo mostrare che la mappa verticale a sinistra è un isomorfismo. Per commutatività basta mostrare che le mappe  $f_i$  sono isomorfismi per  $i = 1, \dots, 5$ .

Le mappe  $f_2, f_4$  sono isomorfismi per il Teorema 2.33 (di Escissione), inoltre si ha  $f_3 = Id$  dato che  $H_n(X \setminus A/A, V \setminus A/A) = H_n(X \setminus A, V \setminus A)$ .

Mostriamo che  $f_1$  è isomorfismo: consideriamo la successione esatta lunga della tripla  $(X, V, A)$ :

$$\dots \longrightarrow H_n(V, A) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{f_1} H_n(X, V) \longrightarrow H_{n-1}(V, A) \longrightarrow \dots$$

Il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $V$  si retrae per deformazione su  $A$ , per cui la mappa  $f_1$  è un isomorfismo per esattezza.

La verifica per  $f_5$  è analoga, lavorando sulla tripla  $(X/A, V/A, A/A)$ . Si è dunque concluso.  $\square$

**Osservazione.**  $H(X, \{p\}) \simeq \tilde{H}(X)$ , ma non è naturale.

Nel caso in cui non si abbia una buona coppia sfruttiamo la seguente costruzione:

**Definizione 26** Il cono di uno spazio  $X$  è  $C(X) = X \times I / X \times \{0\}$ . Si ha l'inclusione  $\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & CX \\ x & \mapsto & (x, 1) \end{array}$ .

Data una coppia  $(X, A)$  possiamo considerare  $X \cup CA$ . Vale:

**Corollario 2.35**  $\tilde{H}(X \cup CA) \simeq H(X, A)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P = [A \times \{0\}]$  la punta di  $CA$ . Sappiamo che vale  $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA, \{P\})$ ; poiché  $CA$  si retrae per deformazione su  $P$  si ha

$$\tilde{H}_n(X \cup CA, \{P\}) \simeq H_n(X \cup CA, CA)$$

e per il Teorema 2.33 (di Escissione)

$$H_n(X \cup CA, CA) \simeq H_n(X \cup CA \setminus \{P\}, CA \setminus \{P\})$$

Infine, poiché  $CA \setminus \{P\}$  si retrae su  $A$  e  $X \cup CA \setminus \{P\}$  si retrae su  $X$  abbiamo

$$H_n(X \cup CA \setminus \{P\}, CA \setminus \{P\}) \simeq H_n(X, A)$$

La catena di isomorfismi dà la tesi.  $\square$

### 2.7.2 Teorema di Jordan-Brouwer

Consideriamo una curva semplice chiusa  $\alpha$  in  $\mathbb{R}^2$  (cioè  $\alpha$  è un loop di  $\mathbb{R}^2$  omeomorfo a  $S^1$ ), allora  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{traccia}(\alpha)$  è unione di due componenti connesse per archi che hanno  $\alpha$  come bordo (topologico). Vogliamo generalizzare questa costruzione.

**Proposizione 2.36** Sia  $(X, A)$  coppia di spazi topologici. Vale:

1. Dato  $u \in H_n(X, A)$  esiste  $(C, D)$  coppia compatta e esiste  $u' \in H_n(C, D)$  tale che  $i_*(u') = u$  (dove  $i_*$  è la mappa indotta dall'inclusione  $i : (C, D) \hookrightarrow (X, A)$ ).
2. Sia  $(C, D) \subseteq (X, A)$  coppia compatta,  $v \in H_n(C, D)$  con  $i_*(v) = 0$ . Allora esiste una coppia compatta  $(C', D') \subseteq (X, A)$  con  $(C, D) \subseteq (C', D')$  e tale che, detta  $j : (C, D) \hookrightarrow (C', D')$ ,  $j_*(v) = 0$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che ogni catena ha supporto compatto, infatti è combinazione intera finita di semplici singolari, e questi hanno immagine compatta dato che sono continui e con dominio compatto.



1. La classe  $u$  è rappresentata da un ciclo  $\alpha' \in C_n(X, A)$ , il quale a sua volta è rappresentato da un  $\alpha \in C_n(X)$ . Prendiamo  $C = \text{supp}(\alpha)$  e  $D = \text{supp}(\partial\alpha)$ . Allora  $\alpha \in H_n(C, D)$  e  $u = i_*(\alpha)$ .
2. La classe  $v$  è rappresentata da un  $\beta' \in C_n(C, D)$ , il quale a sua volta è rappresentato da un  $\beta \in C_n(C)$ . Poiché  $0 = i_*(v) = [\beta] \in H_n(X, A)$ ,  $\beta$  è un bordo in  $C_n(X, A)$ , dunque esiste  $\gamma \in C_{n+1}(X, A)$  tale che  $\partial\gamma = \beta$  in  $C_n(X, A)$ . Prendiamo allora  $C' = C \cup \text{supp}(\gamma)$ ,  $D' = D \cup \text{supp}(\partial\gamma - \beta)$ .

□

**Lemma 2.37** Sia  $Y \subseteq S^n$  con  $Y \simeq D^k$  con  $0 \leq k \leq n$ . Allora  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$  per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $k$ . *Passo Base:* per  $k = 0$  si ha che  $Y$  è un punto, per cui  $S^n \setminus Y \simeq \mathbb{R}^n$ , da cui la tesi passando all'omologia.

*Passo Induttivo:* identifichiamo  $Y$  con il cubo  $k$ -dimensionale  $I^k$  (che è omeomorfo al disco  $k$ -dimensionale). Consideriamo dunque  $I_+^k = \{x \in I^k : x_k \geq \frac{1}{2}\}$  e  $I_-^k = \{x \in I^k : x_k \leq \frac{1}{2}\}$ , che sono tali che  $I_+^k \cup I_-^k = I^k$  e  $I_+^k \cap I_-^k \simeq I^{k-1}$ . Consideriamo gli insiemi

$$\begin{cases} A = S^n \setminus I_+^k \\ B = S^n \setminus I_-^k \end{cases} \quad \text{che danno} \quad \begin{cases} \mathring{A} \cup \mathring{B} = S^n \setminus (I_+^k \cap I_-^k) = S^n \setminus I^{k-1} \\ A \cap B = S^n \setminus (I_+^k \cup I_-^k) = S^n \setminus I^k \end{cases}$$

Scriviamo la successione di Mayer-Vietoris per  $X = S^n \setminus I^{k-1}$ :

$$\tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus I^{k-1}) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^{k-1})$$

con il primo e l'ultimo termine che sono nulli per ipotesi induttiva, da cui per esattezza abbiamo che  $\varphi = (i_0, i_1) : \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k)$  è un isomorfismo. Supponiamo per assurdo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \neq 0$ . Sia dunque  $a_0 \in \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \setminus \{0\}$ , per cui  $\varphi(a_0) = (i_0, i_1)(a_0) \neq 0$ , supponiamo senza perdita di generalità  $i_0(a_0) =: a_1 \neq 0$ . Iteriamo allora la costruzione appena fatta: dividiamo  $I_+^k$  in due parti,  $I_{++}^k$  e  $I_{+-}^k$  che ricoprono  $I_+^k$  e che hanno intersezione omeomorfa a  $I^{k-1}$ . Costruiamo  $A', B'$  come sopra e scriviamo la successione di Mayer-Vietoris, ottenendo (sfruttando ancora l'ipotesi induttiva) che  $(i_{00}, i_{11}) : \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{++}^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{+-}^k)$  è un isomorfismo, e possiamo supporre senza perdita di generalità  $i_{00}(a_1) =: a_2 \neq 0$ . Continuando ad iterare, costruiamo una successione  $Y \supseteq Y' \supseteq \dots \supseteq Y^{(m)} \supseteq \dots$  con gli  $Y^{(m)}$  omeomorfi a  $I^k$  e con  $\bigcap_m Y^{(m)} = Y^\infty \simeq I^{k-1}$ , e abbiamo anche una successione  $a_m$  di elementi ognuno nel corrispettivo  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)})$  non nulli e che vengono mandati nell'elemento successivo da  $i_{m0}$ <sup>7</sup>. Abbiamo dunque:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y') & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty) = 0 \\ a_0 & \xrightarrow{i_0} & a_1 & \xrightarrow{i_{00}} & \dots & \xrightarrow{\quad} & a_m & \xrightarrow{i_{m0}} & \dots & & \end{array}$$

Sia ora  $j^{(m)} : \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty)$  la mappa nulla (il gruppo in arrivo è nullo). Per la Proposizione 2.36, esiste  $C$  compatto,  $C \subseteq S^n \setminus Y$ , e esiste  $a'_0 \in \tilde{H}_i(C)$  tale che  $a'_0 \mapsto a_0$ . Inoltre, ancora per Proposizione 2.36, esiste  $C'$  compatto tale che  $C \subseteq C' \subseteq S^n \setminus Y^\infty$  e  $a'_0 \mapsto 0 \in \tilde{H}_i(C')$ . Poiché  $C' \subseteq S^n \setminus Y^\infty = \bigcup_m (S^n \setminus Y^{(m)})$  che è unione numerabile crescente di aperti, per

<sup>7</sup>Stiamo qui supponendo, senza perdita di generalità e per semplificare la notazione, che ad ogni iterazione sia l'inclusione rispetto alla prima coordinata, indicata  $i_{m0}$  alla  $m$ -esima iterazione, a mandare l'elemento  $a_m \neq 0$  in qualcosa di non nullo.

compattezza esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che  $C' \subseteq S^n \setminus Y^{(M)}$ . Consideriamo allora il seguente diagramma, dato dalle inclusioni, e il diagramma commutativo indotto in omologia:

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n \setminus Y & \hookrightarrow & S^n \setminus Y^{(M)} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \tilde{H}_i(C) & \xrightarrow{\text{blu}} & \tilde{H}_i(C') \\ \downarrow \text{rosso} & & \downarrow \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) & \xrightarrow{\text{rosso}} & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(M)}) \end{array}$$

Ora, tramite il percorso rosso  $a_0$  va in  $a_M \neq 0$ , mentre tramite il percorso blu  $a_0$  va in 0, assurdo. Dunque deve essere  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema, che dà l'omologia di sfere a cui è stato tolto qualcosa omeomorfo ad una sfera di dimensione più bassa:

**Teorema 2.38** Sia  $K \subseteq S^n$ ,  $K \simeq S^k$  con  $0 \leq k \leq n-1$ . Allora  $\tilde{H}_i(S^n \setminus K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n - k - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $k$ .

*Passo Base:* per  $k = 0$  abbiamo che  $K$  è una coppia di punti, dunque  $S^n \setminus K \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ , dunque si conclude per quanto è noto sull'omologia delle sfere (Teorema 2.13).

*Passo Induttivo:* scomponiamo  $K$  in  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_1, K_2$  omeomorfi al disco  $D^k$  e tali che si abbia  $K_1 \cap K_2 \simeq S^{k-1}$ . Vogliamo studiare l'omologia di  $S^n \setminus K$ , usiamo il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris): prendiamo  $A = S^n \setminus K_1$ ,  $B = S^n \setminus K_2$  dunque  $S^n \setminus K = A \cap B$ . La successione esatta si scrive:

$$\tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(A) \oplus \tilde{H}_{i-1}(B)$$

Per il Lemma 2.37  $A$  e  $B$  hanno omologia banale. Allora sostituendo abbiamo:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus (K_1 \cap K_2)) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus (K_1 \cup K_2)) \longrightarrow 0$$

per cui, essendo  $K_1 \cap K_2 \simeq S^{k-1}$  e  $K_1 \cup K_2 \simeq S^k$  per esattezza abbiamo un isomorfismo

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus S^{k-1}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus S^k)$$

che dà la tesi per ipotesi induttiva.  $\square$

Dal Teorema 2.38 segue:

**Teorema 2.39** (di Jordan-Brouwer) Un sottoinsieme  $A \subseteq S^n$  tale che  $A \simeq S^{n-1}$  sconnette  $S^n$  in due componenti connesse per archi.

*Dimostrazione.* Dal Teorema 2.38 abbiamo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ , da cui deduciamo  $H_0(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}^2$ , cioè  $S^n \setminus A$  ha due componenti connesse. Poiché  $A$  è chiuso,  $S^n \setminus A$  è aperto. Inoltre è localmente connesso per archi, dunque le sue componenti connesse coincidono con le sue componenti connesse per archi.  $\square$

**Proposizione 2.40** Se  $A \subseteq S^n$  con  $A \simeq S^{n-1}$ , allora  $A$  è il bordo di ciascuna delle due componenti connesse per archi di  $S^n \setminus A$ .

*Dimostrazione.*  $S^n \setminus A$  è localmente connesso per archi, dunque ogni sua componente connessa è un aperto di  $S^n \setminus A$  e dunque anche di  $S^n$  ( $S^n \setminus A$  è un aperto di  $S^n$ ). In particolare, il bordo delle componenti connesse di  $S^n \setminus A$  è tutto contenuto in  $A$ . Mostriamo che tutti i punti di  $A$  sono elementi di bordo delle componenti connesse, questo conclude la dimostrazione.

Siano  $C_0, C_1$  le componenti connesse di  $S^n \setminus A$  (sono due per il Teorema 2.39 (di Jordan-Brouwer)). Mostriamo che per ogni  $a \in A$  e per ogni  $N$  intorno di  $a$  si ha  $N \cap C_i \neq \emptyset$ . Poiché  $N \cap A$  è intorno di  $a$  in  $A \simeq S^{n-1}$  possiamo decomporre  $A = A_1 \cup A_2$  con

$$A_1, A_2 \simeq I^{k-1}, \quad A_1 \cap A_2 \simeq S^{n-2}, \quad A_2 \subseteq N \cap A$$

Per il Lemma 2.37 ( $A_1 \simeq I^{k-1}$ )  $S^n \setminus A_1$  è connesso quindi connesso per archi. Fissiamo  $p_0 \in C_0, p_1 \in C_1$  e  $f : I \rightarrow S^n \setminus A_1$  arco con  $f(0) = p_0, f(1) = p_1$ . Poiché  $A$  sconnette,  $f(I) \cap A \neq \emptyset$ , e  $f(I) \cap A_1 = \emptyset$ , dunque necessariamente  $f(I) \cap A_2 \neq \emptyset$ . Quindi  $f^{-1}(A_2) \subseteq I$  è non vuoto ed è compatto, quindi ha minimo  $t_0$  e massimo  $t_1$ . In particolare  $f(t) \in C_0$  per  $t < t_0, f(t) \in C_1$  per  $t > t_1$ .

D'altra parte  $A_2 \subseteq N$  per costruzione, dunque l'aperto  $f^{-1}(N)$  contiene  $t_0$  e  $t_1$ . Ma allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $f(t) \in N \cap C_0$  per  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0), f(t) \in N \cap C_1$  per  $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$ , cioè  $N \cap C_i \neq \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 2.41** (di Invarianza del Dominio) Siano  $U, V \subseteq S^n$  omeomorfi. Allora  $U$  aperto  $\iff V$  aperto.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $U$  sia aperto, nell'altro caso è uguale. Sia  $h : U \rightarrow V$  omeomorfismo,  $x \in U$  e  $N \subseteq U$  intorno di  $x$ , con  $N \simeq D^n$  e  $\partial N \simeq S^{n-1}, y = h(x)$ .  $N' = h(N)$  è intorno chiuso di  $y$  in  $V$  con bordo  $\partial N' = h(\partial N)$ . Per il Lemma 2.37  $S^n \setminus N'$  è connesso, e per il Teorema 2.39 (di Jordan-Brouwer)  $S^n \setminus \partial N'$  ha due componenti connesse, che sono  $N' \setminus \partial N'$  e  $S^n \setminus N'$ <sup>8</sup>. In particolare  $N' \setminus \partial N'$  è intorno aperto di  $y$  in  $V$ , cioè  $y$  è interno a  $V$ , quindi  $V$  è aperto.  $\square$

**Corollario 2.42**  $A, B \subseteq S^n, h : A \rightarrow B$  omeomorfismo  $\implies h(\mathring{A}) = \mathring{B}$  e  $h(\partial A) = (\partial B)$ .

Non lo dimostriamo, ma vale anche il seguente:

**Teorema 2.43** (di Schoenflies)  $J \subseteq S^2, J \simeq S^1$ . Allora esiste un omeomorfismo di  $S^2$  che manda  $J$  nell'equatore.

**Fatto 2.44** Il Teorema 2.43 non vale in dimensione più alta (vedi Alexander horned sphere).

---

<sup>8</sup>Le due componenti connesse sono proprio loro perché sono due insiemi disgiunti, connessi e ricoprono  $S^n$ .



## Chapter 3

# Omologia di Grafi

**Definizione 27** Un *grafo regolare finito* (in breve *grafo*) è una coppia  $(X, X^0)$  con  $X$  Hausdorff,  $X^0 \subseteq X$  finito, detto *insieme dei vertici*, tale che

1.  $X \setminus X^0$  è unione finita di aperti disgiunti  $e_1, \dots, e_k$ , detti *lati*, che sono omeomorfi ad intervalli aperti
2.  $\bar{e}_i \setminus e_i$ , in breve  $\partial e_i$ , è un insieme di due vertici distinti, e  $(\bar{e}_i, e_i) \simeq ([0, 1], (0, 1))$ .

**Osservazione.** Un grafo è un compatto, e si può sempre immergere in  $\mathbb{R}^3$ .

**Osservazione.** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , possiamo “suddividerlo” aggiungendo vertici.

Per studiare l’omologia di  $X$  con  $(X, X^0)$  grafo, studiamo prima l’omologia della coppia  $(X, X^0)$ .

**Osservazione.**  $(\bar{e}, \partial e) \simeq (D^1, S^0)$ , dunque dalla Proposizione 2.16:  $H_i(\bar{e}, \partial e) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

**Teorema 3.1** Sia  $(X, X^0)$  un grafo di lati  $e_1, \dots, e_k$ . Allora l’inclusione  $(\bar{e}_i, \partial e_i) \hookrightarrow (X, X^0)$  induce un omomorfismo iniettivo in omologia. Inoltre  $H_p(X, X^0) = \bigoplus_{i=1}^k H_p(\bar{e}_i, \partial e_i)$ .

*Dimostrazione.* Identifico  $\bar{e}_i$  con  $[0, 1]$ ,  $a_i \in \bar{e}_i$  con  $\frac{1}{2} \in [0, 1]$  e  $d_i \subseteq \bar{e}_i$  con  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subseteq [0, 1]$ . Siano inoltre  $D = \bigcup_i d_i$  e  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Abbiamo il seguente diagramma dato dalle inclusioni:

$$\begin{array}{ccccc} (D, D \setminus A) & \longrightarrow & (X, X \setminus A) & \longleftarrow & (X, X^0) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (d_i, d_i \setminus \{a_i\}) & \longrightarrow & (\bar{e}_i, \bar{e}_i \setminus \{a_i\}) & \longleftarrow & (\bar{e}_i, \partial \bar{e}_i) \end{array}$$

che induce il seguente diagramma commutativo in omologia:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(D, D \setminus A) & \xrightarrow{1} & H_p(X, X \setminus A) & \xleftarrow{2} & H_p(X, X^0) \\ \uparrow 5 & & \uparrow & & \uparrow \\ H_p(d_i, d_i \setminus \{a_i\}) & \xrightarrow{3} & H_p(\bar{e}_i, \bar{e}_i \setminus \{a_i\}) & \xleftarrow{4} & H_p(\bar{e}_i, \partial \bar{e}_i) \end{array}$$

Le frecce orizzontali sono tutte isomorfismi, infatti: 2,4 lo sono perché  $X^0$  e  $\partial \bar{e}_i$  sono retratti di deformazione rispettivamente di  $X \setminus A$  e  $\bar{e}_i \setminus \{a_i\}$ ; 1,3 lo sono per il Teorema 2.33 (di Escissione). Infine,  $D$  è sconnesso,  $(D, D \setminus A) = \bigsqcup_{i=1}^k (d_i, d_i \setminus \{a_i\})$ , per cui  $H_p(D, D \setminus A) = \bigoplus_{i=1}^k H_p(d_i, d_i \setminus \{a_i\})$  e la mappa 5 dà le inclusioni (omomorfismi iniettivi) degli addendi nella somma diretta. Segue la tesi per commutatività.  $\square$

Mettendo insieme i risultati dell'Osservazione precedente e del Teorema 3.1 abbiamo

$$H_i(X, X^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove, secondo la notazione introdotta all'inizio,  $k$  è il numero di lati del grafo.

Siamo interessati allo studio di  $H_1(X)$ . Abbiamo la successione esatta

$$0 = H_1(X^0) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

con  $H_0(X)$ ,  $H_0(X^0)$  e  $H_1(X, X^0)$  gruppi liberi, sfruttiamolo per ottenere informazioni su  $H_1(X)$ .

**Fatto 3.2** Sottogruppi di gruppi abeliani liberi sono ancora gruppi abeliani liberi. Inoltre, data una successione esatta corta di gruppi abeliani liberi, esiste una sezione  $s$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xleftarrow{s} C \longrightarrow 0$$

e il gruppo centrale si fattorizza:  $B \simeq A \oplus C$ .

**Fatto 3.3** Dal Fatto 3.2 segue che data una successione esatta di gruppi abeliani liberi, la somma a segno alterno dei ranghi è nulla (e la cosa si generalizza per una successione finita lunga a piacere).

**Definizione 28** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , la sua *caratteristica di Eulero* è la differenza tra il numero dei vertici e il numero di lati:  $\chi(X, X^0) = \#\text{vertici} - \#\text{lati}$ .

**Teorema 3.4** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , si ha che  $H_q(X) = 0$  per ogni  $q > 1$ , e  $H_1(X)$  è un gruppo abeliano libero tale che  $\text{rk}(H_0(X)) - \text{rk}(H_1(X)) = \chi(X, X^0)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta

$$0 = H_1(X^0) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

Per esattezza  $H_1(X)$  si inietta in  $H_1(X, X^0)$  che è abeliano libero, quindi  $H_1(X)$  è abeliano libero. Allora, dal Fatto 3.3, sappiamo che la somma a segni alterni dei ranghi dei gruppi della successione è nulla, cioè

$$\text{rk}(H_1(X)) - \text{rk}(H_1(X, X^0)) + \text{rk}(H_0(X^0)) - \text{rk}(H_0(X)) = 0$$

Si è visto che:  $\begin{cases} \text{rk}(H_1(X, X^0)) = \#\text{lati} \\ \text{rk}(H_0(X^0)) = \#\text{vertici} \end{cases}$ , dunque la relazione precedente si riscrive

$$\#\text{vertici} - \#\text{lati} = \text{rk}(H_0(X)) - \text{rk}(H_1(X))$$

che è la tesi. □

Torniamo alla successione della coppia  $(X, X^0)$ :

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

si è visto che  $H_1(X, X^0) = \mathbb{Z}^{\#\text{lati}}$ ,  $H_0(X^0) = \mathbb{Z}^{\#\text{vertici}}$ ,  $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\#\text{cc di } X}$ .

A volte è utile studiare esplicitamente la mappa  $\partial_* : H_1(X, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ , infatti per esattezza, essendo  $j_*$  iniettiva,  $H_1(X) \simeq \text{Im}(j_*) = \ker \partial_*$ . Per farlo, cerchiamo delle basi dei gruppi

(abeliani liberi) coinvolti. Siano  $e_1, \dots, e_k$  i lati,  $v_1, \dots, v_m$  i vertici.

Con abuso di notazione, indichiamo con  $v_i$  anche il generatore di  $H_0(X^0)$  che sia immagine del generatore di  $H_0(\{v_i\})$  tale che  $\varepsilon(v_i) = 1$ . Dunque  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è una base di  $H_0(X^0)$ .

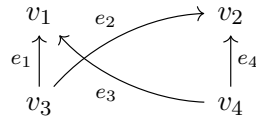
Per prendere una base di  $H_0(X, X^0)$  non si può fare una scelta altrettanto naturale. Comunque, per quanto detto nel Teorema 3.1, è sufficiente prendere un generatore per ogni  $H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$ . Questa scelta è tanto naturale quanto scegliere un generatore di  $\tilde{H}_0(\partial e_i)$ , infatti abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(\partial e_i) & \longrightarrow & H_0(\partial e_i) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & & \nwarrow \partial_1(\simeq) & \uparrow \partial_* & & \\
 & & & & H_1(\bar{e}_i, \partial e_i) & & 
 \end{array}$$

**Osservazione.** Abbiamo  $\tilde{H}_0(\partial e_i) = \mathbb{Z} = H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$ ,  $H_0(\partial e_i) = \mathbb{Z}^2$ .

Possiamo allora fare la scelta ordinando i lati: dato un ordine totale  $>$  sull'insieme dei vertici, per un lato  $e_i$  con  $\partial e_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$  con  $v_\beta > v_\alpha$ , prendiamo come generatore di  $H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$  l'elemento (abuso di notazione)  $e_i$  tale che  $\partial_* e_i = v_\beta - v_\alpha$  (cioè si è presa l'orientazione da  $v_\beta$  a  $v_\alpha$ ). Fissata una scelta, possiamo descrivere  $\partial_*$  tramite una matrice. Resta da trovare una base del nucleo per determinare  $H_1(X)$ .

**Esempio 3** Consideriamo il seguente grafo:



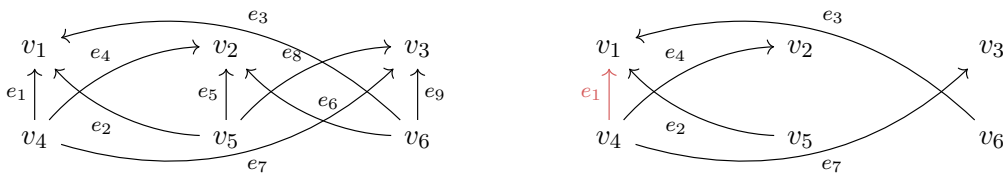
dunque:  $\partial_* e_1 = v_3 - v_1$ ,  $\partial_* e_2 = v_3 - v_2$ ,  $\partial_* e_3 = v_4 - v_1$  e  $\partial_* e_4 = v_4 - v_2$ . Otteniamo la

rappresentazione  $\partial_* \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  (in questa rappresentazione gli  $e_i$  sono i vettori

della base canonica). Abbiamo inoltre che  $z = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$  genera il nucleo. Una base di  $H_1(X, X^0)$  è data da  $\{z, e_2, e_3, e_4\}$ .

In generale, per studiare  $\ker \partial_*$  si hanno molte strade. Per ogni componente connessa del grafo possiamo scegliere un albero massimale (dunque in generale una foresta massimale<sup>1</sup>). Per fare ciò, possiamo ad esempio usare l'ordine lessicografico per ordinare i lati (identifico ogni lato con la coppia dei suoi vertici), e, a partire da un lato, aggiungo lati secondo l'ordinamento, scartando quelli che formano cicli<sup>2</sup>. Allora per avere una base di  $\ker \partial_*$ , per ogni lato  $e$  che non è nella foresta massimale ottenuta consideriamo l'unico cammino chiuso senza ripetizioni che crea un ciclo e passa dall'albero e dal lato in questione  $e$ .

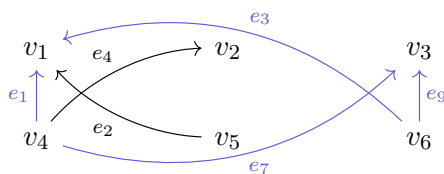
**Esempio 4** Consideriamo il seguente grafo, e un suo albero massimale (ottenuto partendo dal lato  $e_1$ ):



<sup>1</sup>Un albero è un sottoinsieme del grafo nel quale non si può immergere  $S^1$ , una foresta è un insieme di alberi tali per cui aggiungendo un nuovo lato introduco un ciclo.

<sup>2</sup>Possono esserci lati che hanno stessi vertici, in tal caso basta fare scelta arbitraria per ordinarli.

Prendiamo dunque un lato che non è nell'albero massimale, tipo  $e_9$ . Per definizione di albero massimale, sappiamo che aggiungendo  $e_9$  si crea un ciclo, prendiamo quello senza ripetizioni:



e otteniamo che l'elemento  $e_9 - e_7 + e_1 - e_3$  è in  $\ker \partial_*$  (dove i segni sono determinati dal verso con cui vogliamo percorrere i lati<sup>3</sup>, in modo da ottenere una combinazione dei vertici che è nulla). Ripetendo il procedimento per ogni lato che non è nella foresta massimale (che in questo caso corrisponde con l'albero massimale dato che il grafo è connesso) otteniamo una base di  $\ker \partial_*$ .

Ci poniamo ora il seguente problema: data una mappa  $f : X \rightarrow Y$  continua tra grafi  $(X, X^0)$ ,  $(Y, Y^0)$ , come studiamo l'omomorfismo indotto in omologia?

Facciamo delle ipotesi di comodo, che in generale non sono vere per mappe generiche tra grafi, ma che a meno di omotopia e di aggiungere vertici invece lo sono. Supponiamo dunque:

- i.  $f(X^0) \subseteq Y^0$
- ii. i lati vengono mandati da  $f$  in lati oppure in vertici, cioè  $f(\bar{e}_i) = \bar{e}_j'$  oppure  $f(\bar{e}_i) \in Y^0$ .

**Fatto 3.5** Sotto le ipotesi precedenti, una  $f : X \rightarrow Y$  tra grafi induce  $f_* : H_1(X, X^0) \rightarrow H_1(Y, Y^0)$  tale che  $f_*(e_i) = \begin{cases} e_j' & \text{se } f \text{ mappa omeomorficamente } e_i \mapsto e_j' \text{ e preserva l'orientamento} \\ -e_j' & \text{se } f \text{ mappa omeomorficamente } e_i \mapsto e_j' \text{ e non preserva l'orientamento} \\ 0 & \text{se } f \text{ manda } e_i \text{ in un vertice} \end{cases}$

**Esempio 5** Consideriamo il grafo  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  e la mappa  $f : S^1 \rightarrow S^1$  data da  $z \mapsto z^3$ . Allora la mappa  $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  è la moltiplicazione per 3, come si vede considerando i vertici corrispondenti alle radici seste dell'unità in partenza e i vertici corrispondenti a  $\pm 1$  in arrivo.

<sup>3</sup>Se il verso è discorde dall'orientamento del lato in questione prendiamo il segno  $-$ .



## Chapter 4

# Omologia di Superfici Compatte

Ci interessiamo adesso al calcolo dell'omologia di alcune superfici compatte, motivati dal seguente:

**Fatto 4.1** Ogni superficie chiusa, compatta e orientabile è somma connessa di un certo numero di tori.

Ogni superficie chiusa, compatta e non orientabile è somma connessa di un certo numero di tori e di  $\mathbb{RP}^2$ .

Grazie al Fatto 4.1 avremo così (in potenza) un modo di determinare l'omologia di tutte le superfici compatte.

### Omologia del Toro

Consideriamo il toro  $T = S^1 \times S^1$ , e mostriamo che  $H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

Usiamo il Teorema di Mayer-Vietoris. Sia  $T = S^1 \times S^1$  e siano  $P, Q$  punti distinti del primo  $S^1$ . Considero  $A = (S^1 \setminus \{P\}) \times S^1$  e  $B = (S^1 \setminus \{Q\}) \times S^1$ . Vale che  $\mathring{A} \cup \mathring{B} = T$ ,  $A \sim S^1 \sim B$ ,  $A \cap B \sim S^1 \sqcup S^1$ . Ancora con Mayer-Vietoris si mostra facilmente che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$H_n(S^1 \sqcup S^1) = H_n(S^1) \oplus H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{se } n = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.1)$$

Per  $n \geq 3$  si ha la successione

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(T) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

dove il primo e l'ultimo termine sono nulli (per quanto detto nell'equazione 4.1), dunque per esattezza abbiamo  $H_n(T) \simeq H_n(A) \oplus H_n(B) = 0$  per ogni  $n \geq 3$ .

$T$  è connesso per archi, dunque

$$H_0(T) = \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad H_1(T) \simeq \pi_1(T)^{Ab} = \mathbb{Z}^2$$

Studio dunque il resto della successione:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(T) \xrightarrow{\Delta_2} \tilde{H}_1(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B) \xrightarrow{\psi_1} \tilde{H}_1(T) \xrightarrow{\Delta_1} \tilde{H}_0(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_1} 0$$

che riscrivendo i termini già noti è

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(T) \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} 0$$

Ora, usando l'esattezza della successione e il primo Teorema di omomorfismo:

$$\mathbb{Z} = \text{Im}(\Delta_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\Delta_1)$$

dunque

$$\mathbb{Z} \simeq \ker(\Delta_1) = \text{Im}(\psi_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\psi_1) = \mathbb{Z}^2 / \text{Im}(\varphi_1)$$

da cui

$$\mathbb{Z} \simeq \text{Im}(\varphi_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\varphi_1) = \mathbb{Z}^2 / \text{Im}(\Delta_2)$$

e quindi per l'iniettività di  $\Delta_2$

$$\mathbb{Z} \simeq \text{Im}(\Delta_2) \simeq H_2(T)$$

### Omologia del Piano Proiettivo Reale

Sia ora  $X = \mathbb{R}\mathbb{P}^2 = D^2 / \sim$  con  $\sim$  che identifica i punti antipodali di  $\partial D^2 = S^1$ . Abbiamo la mappa di identificazione

$$f : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, X^1) \quad \text{con } X^1 = \partial D^2 / \sim$$

e la sua restrizione al bordo,  $f_1 : \partial D^2 \rightarrow X^1$ , è 2-1 come mappa  $S^1 \rightarrow S^1$ . La mappa indotta in omologia  $f_* : H_i(D^2, \partial D^2) \rightarrow H_i(X, X^1)$  è isomorfismo, infatti, detti  $D_\varepsilon^2$  il disco di raggio  $0 < \varepsilon < 1$  e  $e$  il centro di  $D^2$ , abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_i(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{(1)} & H_i(D^2, D^2 \setminus \{e\}) & \xleftarrow{(2)} & H_i(D_\varepsilon^2, D_\varepsilon^2 \setminus \{e\}) \\ f_* \downarrow & & & & \downarrow (5) \\ H_i(X, X^1) & \xrightarrow{(3)} & H_i(X, X \setminus \{e\}) & \xleftarrow{(4)} & H_i(f(D_\varepsilon^2), f(D_\varepsilon^2) \setminus \{e\}) \end{array}$$

Le mappe (1) e (3) sono isomorfismi perché  $D^2 \setminus \{e\}$  si retrae per deformazione su  $\partial D^2$  e  $X \setminus \{e\}$  si retrae per deformazione su  $X^1$ . Inoltre le mappe (2) e (4) sono isomorfismi per escissione, e (5) è isomorfismo perché è indotta dalla restrizione di  $f$  che è un omeomorfismo. Dunque  $f_*$  isomorfismo, come voluto.

Ma allora abbiamo il seguente diagramma, dato dalle successioni delle coppie:

$$\begin{array}{ccccccc} \overbrace{H_2(X^1)}^{=0} & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow & H_2(X, X^1) & \xrightarrow{(4)} & \overbrace{H_1(X^1)}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow \overbrace{H_1(X, X^1)}^{H_1(D^2, \partial D^2)=0} \\ & & & & \uparrow (2) f_* & & \uparrow f_*^1 (3) \\ 0 = H_2(D^2) & \longrightarrow & \underbrace{H_2(D^2, \partial D^2)}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{(1)} & \underbrace{H_1(\partial D^2)}_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & H_1(D^2) = 0 \end{array}$$

Dove (1) è isomorfismo per esattezza, (2) è isomorfismo per quanto provato sopra, (3) è la moltiplicazione per 2 (perché come detto  $f^1$  è mappa 2-1). Ma allora  $H_2(X, X^1) = \mathbb{Z}$  e la mappa (4) è per commutatività la moltiplicazione per  $\pm 2$ .

Segue per esattezza che  $H_2(X) = \ker(4) = 0$ ,  $H_1(X) = \text{coker}(4) = \mathbb{Z}_2$ . Inoltre  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Si verifica immediatamente tramite la successione della coppia che  $H_i(X) = 0$  per  $i > 2$ .

## Chapter 5

# Complessi CW

Notazione:  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  è il disco unitario  $n$ -dimensionale chiuso,  $U^n = \overset{\circ}{D}^n$  è il disco unitario  $n$ -dimensionale aperto,  $S^{n-1} = \partial D^n$  è la sfera unitaria  $n$ -dimensionale.

Consideriamo spazi topologici ottenuti incollando dischi  $D^n$  tra loro:

Sia  $X^*$  spazio di Hausdorff,  $X \subseteq X^*$  tale che  $X^* \setminus X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^n$  con gli  $e_\lambda^n$  aperti e omeomorfi a  $U^n$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ .

**Definizione 29** Gli  $e_\lambda^n$  si chiamano *n-celle*.

Inoltre, siano gli  $e_\lambda^n$  “attaccati” a  $X$  con una *mappa caratteristica*, cioè esiste una famiglia di funzioni  $f_\lambda : D^n \rightarrow \overline{e_\lambda^n}$  tali che  $f_\lambda|_{U^n} : U^n \rightarrow e_\lambda^n$  omeomorfismo e tali che  $f_\lambda(\partial D^n) \subseteq X$ .

Se le celle sono in numero finito, è chiaro quale sia la topologia di  $X^*$ . Altrimenti, dotiamo  $X^*$  della topologia debole associata alla famiglia  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ <sup>1</sup>.

**Definizione 30** Un *complesso CW* è uno spazio di Hausdorff  $X$  ottenuto come unione di sottospazi  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots$  tali che:

- i.  $X^0$  è discreto
- ii. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^n$  si ottiene da  $X^{n-1}$  incollando  $n$ -celle;
- iii.  $X = \bigcup_n X^n$
- iv.  $X$  e  $X^n$  sono dotati della topologia debole:  $A \subseteq X$  (oppure  $A \subseteq X^n$ ) è chiuso se e solo se per ogni  $\lambda$  e per ogni  $n$   $f_\lambda^{-1}(A \cap \overline{e_\lambda^n})$  è chiuso.

Inoltre, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^n$  si chiama *n-scheletro*.

**Osservazione.** I complessi sono detti CW perché stiamo dotando lo spazio della topologia debole (*weak*).

**Teorema 5.1** Se  $X^*$  è ottenuto da  $X$  incollando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ , allora  $H_i(X^*, X) = 0$  per  $i \neq n$ .

Per ogni  $\lambda \in \Lambda$  si ha che  $f_\lambda$  induce un omomorfismo iniettivo  $H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X^*, X)$ .

Inoltre  $H_n(X^*, X) = \bigoplus_\lambda \text{Im} f_{\lambda*}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 3.1. □

---

<sup>1</sup>Cioè  $C \subseteq X^*$  è chiuso se e solo se ha preimmagine chiusa rispetto a ogni  $f_\lambda$ .

**Corollario 5.2** Se  $X^*$  è ottenuto da  $X$  incollando  $n$ -celle, l'inclusione  $X \hookrightarrow X^*$  induce in omologia  $H_i(X) \rightarrow H_i(X^*)$  che è un isomorfismo eccetto al più per  $i = n, n-1$ . Si ha inoltre la successione esatta

$$0 \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X^*) \longrightarrow H_n(X^*, X) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow H_{n-1}(X^*) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* La tesi si ottiene subito considerando la successione esatta della coppia  $(X^*, X)$  e usando il Teorema 5.1.  $\square$

**Osservazione.** Date coppie  $(X^*, X)$  e  $(Y^*, Y)$ , con  $X^*$  e  $Y^*$  ottenuti attaccando  $n$ -celle rispettivamente a  $X$  e  $Y$ , e  $f : (X^*, X) \rightarrow (Y^*, Y)$ , allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X^*) & \longrightarrow & H_n(X^*, X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y^*) & \longrightarrow & H_n(Y^*, Y) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esempi di Complessi CW:

- i.  $S^n$ , ad esempio come una 0-cella e una  $n$ -cella
- ii. Grafi, si usano 0-celle e 1-celle
- iii. Superfici compatte
- iv. Prodotto di complessi CW
- v. Spazi Proiettivi
- vi.  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{K} = \bigcup_n \mathbb{P}^n \mathbb{K}$  per  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , o anche  $S^\infty = \bigcup_n S^n$

**Osservazione.** In generale un complesso CW non ha un modo unico di essere espresso come incollamento di celle. Basta pensare ai grafi, in cui si possono aggiungere vertici (0-celle) a piacere.

Proprietà dei complessi CW:

- (1) Un complesso CW è paracompatto<sup>2</sup>, in particolare dunque anche normale.
- (2) Un complesso CW è localmente contraibile.
- (3) Un compatto in un complesso CW interseca un numero finito di celle.
- (4) Una funzione definita su un complesso CW è continua se e solo se sono continue le restrizioni alle celle chiuse.

Dalla proprietà (3) si ha il seguente risultato, importante:

**Proposizione 5.3** La chiusura di una cella di un complesso CW interseca un numero finito di celle.

*Dimostrazione.* Basta osservare che la chiusura di celle è un compatto (in quanto immagine di  $D^n$  che è compatto) e usare la proprietà (3).  $\square$

<sup>2</sup>Cioè ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito.

**Definizione 31** Per  $X$  complesso CW, un sottocomplesso è  $A \subseteq X$  tale che se  $e_\lambda^n \cap A \neq \emptyset$  allora  $\bar{e}_\lambda^n \subseteq A$ .

**Osservazione.** Ad esempio, gli  $n$ -scheletri sono sottocomplessi.

**Definizione 32** Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW si dice cellulare se  $f(X^n) \subseteq Y^n$  per ogni  $n$ .

Vale il seguente Teorema, che dimostreremo più avanti:

**Teorema 5.4** Ogni mappa tra complessi CW è omotopa ad una mappa cellulare.

## 5.1 Omologia di Complessi CW

Si è detto che un complesso CW è uno spazio topologico. Per dire che uno spazio topologico è un complesso CW, bisogna esibire un famiglia  $K = \{K^n\}$  di  $n$ -scheletri. Tuttavia, non c'è motivo che sia unica la famiglia di  $n$ -scheletri che dà allo spazio topologico la struttura di complesso CW. Vogliamo dunque studiare se (e nel caso quali) relazioni ci sono tra l'omologia di uno spazio topologico dotato e non di struttura di complesso CW.

Notazione: per semplicità a volte potrebbe tornare utile considerare  $K = \{K^n\}$  indicizzato su  $\mathbb{Z}$  invece che su  $\mathbb{N}$ , in tal caso poniamo  $K^n = 0$  per  $n < 0$ .

**Osservazione.** Poiché  $K^n$  è ottenuto da  $K^{n-1}$  incollando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda_n}$ , si ha (Teorema 5.1)

$$H_i(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ \mathbb{Z}^{\oplus |\Lambda_n|} & \text{se } i = n \end{cases} . \quad (5.1)$$

**Lemma 5.5**  $H_i(K^n) = 0$  per ogni  $i > n$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione. *Passo base:* per  $n = 0$  è ovvio ( $K^0$  è discreto).

*Passo Induttivo:* sia  $n > 0$ ,  $i > n$ . Dalla successione della coppia abbiamo

$$H_i(K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^n) \longrightarrow H_i(K^n, K^{n-1})$$

con il primo termine che è nullo per ipotesi induttiva, e l'ultimo termine che è nullo per quanto osservato sopra. Per esattezza di ottiene dunque  $H_i(K^n) = 0$ .  $\square$

Dato  $K$  complesso CW, vogliamo costruire un complesso algebrico a lui associato.

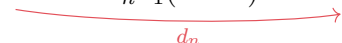
**Osservazione.** In questo momento, stiamo identificando  $X$  con  $K$ , cioè allo spazio  $X$  stiamo dando una fissata famiglia di  $n$ -scheletri.

**Definizione 33** Il *complesso delle catene cellulari* è  $(C(K), d) = \{C_n(K), d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , in cui

$$C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$$

e  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  è data dalla composizione

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$



dove  $\partial_*$  è l'omomorfismo di connessione della successione della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ , e  $j_{n-1}$  è l'omomorfismo indotto dalla proiezione, tratto dalla successione della coppia  $(K^{n-1}, K^{n-2})$ .

**Osservazione.**  $d^2 = 0$ , infatti componendo  $d_n$  e  $d_{n-1}$  si ottiene che  $d^2$  è composizione di 4 mappe, le cui due centrali sono due omomorfismi consecutivi della successione esatta della coppia  $(K^{n-1}, K^{n-2})$ , dunque hanno composizione nulla, e anche globalmente la composizione è nulla.

**Osservazione.** Scrivendo la successione esatta lunga della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  si può verificare che la mappa  $d_n$  coincide con l'omomorfismo di connessione  $H_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$ .

**Definizione 34** i. Gli elementi di  $Z_n(K) := \ker(d_n)$  sono detti *n-cicli*

ii. Gli elementi di  $B_n(K) := \text{Im}(d_{n+1})$  sono detti *n-bordi*

iii.  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$  è detta *omologia cellulare*

In seguito  $X, K$  indicano lo stesso spazio topologico, con  $K$  dotato della struttura di complesso CW.

**Teorema 5.6** Consideriamo le mappe

$$k_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(X) \quad j_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$$

dove  $k_n$  è la mappa indotta dall'inclusione  $K^n \hookrightarrow X$  e  $j_n$  è tratta dalla successione della coppia. Si ha:

a.  $k_n$  è suriettiva    b.  $j_n$  è iniettiva    c.  $\text{Im}(j_n) = Z_n(K)$     d.  $\ker(k_n) = j_n^{-1}(B_n(K))$ .

Segue inoltre che la composizione

$$H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1})$$

induce un isomorfismo  $\theta_n : H_n(X) \rightarrow H_n(K)$ .

*Dimostrazione.* Dalla successione della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ , per  $i \neq n, n-1$  si ha

$$0 \xrightarrow{T.5.1} H_{i+1}(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^n) \longrightarrow H_i(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{T.5.1} 0$$

Dunque per  $i \neq n, n-1$  per esattezza abbiamo  $H_i(K^{n-1}) \simeq H_i(K^n)$ . Abbiamo dunque:

$$\begin{array}{ccccccc} H_i(K^{i+1}) & \xrightarrow{\simeq} & H_i(K^{i+2}) & \xrightarrow{\simeq} & H_i(K^{i+3}) & \xrightarrow{\simeq} & \dots \\ & \searrow k_{i+1} & \downarrow k_{i+2} & \swarrow k_{i+3} & & & \\ & & H_i(X) & & & & \end{array}$$

- se  $X$  ha dimensione finita, cioè esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $K^m = K^N$  per  $m \geq N$ , allora  $k_{N+n} = Id$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , da cui per commutatività  $k_{i+1}$  è un isomorfismo (tutti i  $k_{i+n}$  lo sono).

- se  $X$  non ha dimensione finita, dico che ancora  $k_{i+1}$  è isomorfismo, infatti: ogni classe di omologia e ogni bordo hanno supporto compatto, e ogni compatto interseca un numero finito di celle. Allora scelto  $\alpha \in H_i(X)$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $\alpha \in \text{Im}(k_N)$ , per cui, usando gli isomorfismi in orizzontale,  $\alpha \in \text{Im}(k_{i+1})$ . Preso un  $\beta \in \ker(k_{i+1})$ , esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che  $\beta$  è nullo in  $H_i(K^M)$ , e usando gli isomorfismi orizzontali si ottiene  $\beta = 0 \in H_i(K^{i+1})$ .

Si è dunque provato che  $k_{i+1} : H_i(K^{i+1}) \rightarrow H_i(X)$  è isomorfismo.

Consideriamo ora la seguente successione esatta, a cui abbiamo aggiunto qualche "pezzo":

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(K^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_n} & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow d_n & & \downarrow j_{n-1} & \searrow k_{n-1} & \downarrow k_n & & \\ & & & & & & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & & H_{n-1}(X) & & \end{array}$$

dove il primo termine della successione è  $H_n(K^{n-1})$ , nullo per il Lemma 5.5, e l'ultimo termine della successione è  $H_{n-1}(K^n, K^{n-1})$ , nullo per il Teorema 5.1.

a. Per esattezza  $i_n$  è suriettiva. Inoltre, per la commutatività dell'ultimo triangolo, ricaviamo che  $k_{n-1}$  è suriettiva e  $\ker(k_{n-1}) = \ker(i_n)$ .

b. Per esattezza  $j_n$  è iniettiva.

c. Poiché  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$  e  $j_{n-1}$  è iniettiva,  $Z_n(K) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_n) = \ker(\partial_*) = \text{Im}(j_n)$  per esattezza.

d.  $\ker(k_{n-1}) \stackrel{\text{a.}}{=} \ker(i_n) = \text{Im}(\partial_*) = j_{n-1}^{-1}(\text{Im}(d_n)) = j_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(K))$ .  $\square$

**Corollario 5.7** L'omologia cellulare coincide con l'omologia singolare, indipendentemente dalla struttura di complesso CW di cui dotiamo lo spazio topologico in questione.

Conseguenze:

1. Se  $X$  è un complesso CW di dimensione  $n$ , allora  $H_i(X) = 0$  per ogni  $i > n$ .
2. Se  $X$  complesso CW ha un numero finito di  $n$ -celle, allora  $H_n(X)$  è finitamente generato.
3. Se  $X$  è un complesso CW senza  $n$ -celle, allora  $H_n(X) = 0$ .

**Definizione 35** Se  $X$  spazio topologico con struttura  $K = \{K_n\}$  di complesso CW finito, e  $\alpha_n$  è il numero di  $n$ -celle, allora la *caratteristica di Eulero* è  $\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ .

**Osservazione.**  $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1}) = \mathbb{Z}^{\#n\text{-celle}}$ , cioè  $\text{rk}(C_n(K)) = \alpha_n$ .

Ci occupiamo ora di dimostrare che, almeno nel caso finito-dimensionale,  $\chi(K)$  non dipende da  $K$ , cioè la caratteristica di Eulero di uno spazio non dipende dalla struttura di complesso CW del quale lo dotiamo. Per farlo, necessitiamo di fare prima altre considerazioni:

**Definizione 36** Dato un gruppo abeliano  $G$ , un insieme  $X \subseteq G$  si dice *linearmente indipendente* se soddisfa le condizioni di linear indipendenza a coefficienti interi.

**Definizione 37** Il *rank* di un gruppo abeliano  $G$  è il massimo delle cardinalità dei sottoinsiemi linearmente indipendenti. Lo indichiamo con  $\text{rk}(G)$ .

Proprietà:

- (1) Dati  $A, B$  gruppi abeliani, se  $A \subseteq B$  oppure se  $A$  è quoziente di  $B$  si ha  $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$ .
- (2) Data una successione esatta corta  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  di gruppi abeliani, la somma a segno alterno dei ranghi è nulla, o in altre parole  $\text{rk}(A) + \text{rk}(C) = \text{rk}(B)$ .

Per dimostrare che  $\chi(K)$  non dipende da  $K$  basta mostrare il seguente:

**Lemma 5.8** Se  $K$  è una struttura di complesso CW finito su  $X$ , allora

$$\chi(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (-1)^n \text{rk}(C_n(K)) = \sum (-1)^n \text{rk}(H_n(X))$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $K$  è struttura di CW complesso finito, dunque esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che il complesso cellulare è

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Mostriamo la tesi per induzione su  $n$  (dimensione del complesso CW).

*Passo Base* ( $n = 1$ ): consideriamo le due successioni

$$0 \longrightarrow B_0 \longleftarrow C_0 = Z_0 \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_1(C) \longleftarrow C_1 \xrightarrow{\partial} B_0 \longrightarrow 0$$

La prima è esatta perché  $C_0 = Z_0$ , per cui  $H_0(C)$  è esattamente il quoziente di  $C_0$  e  $B_0$ ; anche la seconda è esatta, infatti:  $n = 1$ , quindi  $B_1 = 0$ , cioè  $H_1(C) = Z_1(C)$ , che si inietta in  $C_1$ , e tramite la mappa di bordo (che ha come immagine  $B_0$ ) va a 0, che è l'esattezza.

Per la Proprietà (2) riportata sopra abbiamo  $\text{rk}(B_0) + \text{rk}(H_0(C)) = \text{rk}(C_0)$ ,  $\text{rk}(H_1(C)) + \text{rk}(B_0) = \text{rk}(C_1)$  da cui facendo le differenze otteniamo la tesi:

$$\text{rk}(C_0) - \text{rk}(C_1) = \text{rk}(H_0(C)) - \text{rk}(H_1(C))$$

*Passo Induttivo*: considero il complesso  $C'$  ottenuto dal complesso  $C$  eliminando  $C_n(K)$ . Abbiamo le due successioni esatte (la verifica che siano esatte è analoga a quella già fatta nel caso  $n = 1$ )

$$0 \longrightarrow H_n(C) \longleftarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0 \quad (a)$$

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longleftarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0 \quad (b)$$

Per costruzione di  $C'$  abbiamo

$$H_i(C') = H_i(C) \text{ per ogni } i \leq n-2, \quad H_{n-1}(C') = Z_{n-1}(C) \quad (c)$$

Allora, sfruttando ancora la Proprietà (2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(C_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n \text{rk}(C_n) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\ &\stackrel{\text{hp.ind.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\ &\stackrel{(b),(c)}{=} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^{n-1} (\text{rk}(B_{n-1}) + \text{rk}(H_{n-1}(C))) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(H_i(C)) \end{aligned}$$

□

**Osservazione.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare tra spazi dotati di struttura di complessi CW:  $K = \{K^n\}$  per  $X$  e  $L = \{L^n\}$  per  $Y$ , dunque  $f(K^n) \subseteq L^n$  per ogni  $n$ . A partire dalle successioni esatte delle coppie, abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(K^n) & \longrightarrow & H_n(K^n, K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & f_n \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_n \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(L^n) & \longrightarrow & H_n(L^n, L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



dove  $f_n$  e  $\varphi_n$  sono le mappe indotte da  $f$ . Dalla definizione di  $d_n$  segue anche la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{\varphi_n} & C_n(L) \\ d_n \downarrow & & \downarrow d_n \\ C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & C_{n-1}(L) \end{array}$$

per cui le  $\varphi_n$  inducono omomorfismi  $\varphi_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ .

**Teorema 5.9** Sia  $\theta_n$  l'isomorfismo visto nel Teorema 5.6 tra omologia singolare e omologia cellulare, siano  $f_n, \varphi_n$  mappe come sopra indotte da  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare. Allora commuta il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{\theta_n} & H_n(K) \\ f_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ H_n(Y) & \xrightarrow{\theta'_n} & H_n(L) \end{array}$$

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X) & \xleftarrow{k_n} & H_n(K^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K^n, K^{n-1}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow \varphi_* \\ H_n(Y) & \xleftarrow{k'_n} & H_n(L^n) & \xrightarrow{j'_n} & H_n(L^n, L^{n-1}) \end{array}$$

e dalla definizione di  $\theta_n$ . □

Vediamo ora come calcolare i differenziali  $d_n$  e le mappe  $\varphi_n$ : sia  $X$  ottenuto da  $A$  attaccando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Si è visto che c'è un isomorfismo  $\Phi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X, A)$ . Vogliamo studiare la sua inversa. Fissiamo una cella  $e = e_{\lambda_0}^n$ : l'inclusione  $(X, A) \hookrightarrow (X, X \setminus e)$  induce in omologia un omomorfismo  $p_n^* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, X \setminus e)$ , inoltre abbiamo l'isomorfismo di escissione  $H_n(X, X \setminus e) \rightarrow H_n(D^n, S^{n-1})$ . Allora la composizione delle due mappe descritte  $H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, X \setminus e) \rightarrow H_n(D^n, S^{n-1})$  dà l'inversa di  $\Phi$  sulla componente relativa a  $e$ . Dato  $X$  spazio topologico dotato di struttura  $K = \{K^n\}$  di complesso CW, il morfismo di connessione della successione della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  è

$$\bigoplus_{\lambda} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \xrightarrow{\Phi} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{\mu} H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$$

dunque tramite l'isomorfismo  $\Phi$  corrisponde ad una matrice (in quanto è mappa  $\mathbb{Z}^{\oplus \lambda} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus \mu}$ ) di mappe  $m(\lambda, \mu) : H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$ . Consideriamo la composizione

$$S_\lambda^{n-1} \xrightarrow{f^\lambda} K^{n-1} \longrightarrow K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) = D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2} \xrightarrow{\sim} S^{n-1} \\ \searrow L^{\lambda, \mu} \nearrow$$

dove  $f^\lambda$  è la mappa di incollamento della  $n$ -cella  $e_\lambda^n$  ristretta al bordo. La mappa  $L^{\lambda, \mu}$ , in quanto è una mappa  $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , ha un grado.

**Definizione 38** Il grado della mappa  $L^{\lambda, \mu}$ , indicato con  $d(\lambda, \mu)$ , si chiama *numero di incidenza* della coppia di celle  $\lambda, \mu$ .

**Osservazione.** Si è già visto il caso  $n = 1$  (grafi), in cui il numero di incidenza è  $\pm 1$  oppure 0.

**Proposizione 5.10** Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{m(\lambda, \mu)} & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) \\ \partial \downarrow & & \downarrow p_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{L^{\lambda, \mu}} & \tilde{H}_{n-1}(D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2}) \end{array}$$

( $\partial$  è il morfismo di connessione della successione della coppia,  $p_*$  la mappa indotta dalla proiezione al quoziente).

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_{n-1}(K^{n-1}/K^{n-2}) \\ \uparrow \Phi_\lambda & & \uparrow f_*^\lambda & & \downarrow p_*^\mu & & \downarrow \\ H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1})} & \tilde{H}_{n-1}(K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1})) & & \downarrow \Phi_\mu \\ & & & \downarrow \text{escissione} & \downarrow L^{\lambda, \mu} & & \uparrow \\ & & & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_{n-1}(D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2}) & \\ & \searrow m(\lambda, \mu) & & & & & \end{array}$$

□

**Osservazione.** La definizione di numero di incidenza usa la mappa caratteristica che dà l'incollamento della cella e usa una equivalenza omotopica tra  $D^n/S^{n-1}$  e  $S^n$ . Queste mappe non sono intrinseche nella struttura di complesso CW di cui lo spazio è dotato, quindi i numeri di incidenza non sono completamente determinati dalla struttura che diamo a  $X$ . Tuttavia scelte diverse possono al più portare ad un cambio di segno.

### 5.1.1 Omologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

**Teorema 5.11** Per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  si ha  $H_i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i \leq n \text{ e } 2|i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che il proiettivo complesso è dato dall'unione di  $2k$ -celle per  $k = 0, 1, \dots, n$ , per cui il suo complesso cellulare è

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}=0} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{d_2=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

ed ha tutte le mappe di bordo nulle. Ma allora i cicli sono sempre tutto e i bordi sempre banali, cioè l'omologia coincide con il complesso. Si ha quindi la tesi. □

### 5.1.2 Omologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$

Consideriamo  $S^n$  ottenuta come unione di coppie di  $i$ -celle per  $i = 0, 1, \dots, n$ . In particolare il complesso cellulare associato è

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

infatti  $C_i^{CW}(S^n) = H_i(S^i, S^{i-1}) = H_i(D_+^i, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-^i, S^{i-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

La mappa antipodale  $S^n \xrightarrow{\alpha} S^n$  si restringe sull'equatore, dando la mappa antipodale in dimensione diminuita di 1, inoltre è un omeomorfismo. Allora<sup>3</sup>, se  $x^i$  genera  $H_i(D_+^i, S^{i-1})$ ,  $\alpha_* x^i$  genera  $H_i(D_-^i, S^{i-1})$ .

<sup>3</sup>La funtorialità di  $H$  dà che  $\alpha$  omeomorfismo implica  $\alpha_*$  isomorfismo.

**Lemma 5.12**  $d_i(x^i) = \pm(\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1})$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $d_i$  è la composizione

$$H_i(S^i, S^{i-1}) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(S^{i-1}) \xrightarrow{j_{i-1}} H_{i-1}(S^{i-1}, S^{i-2})$$

e che la mappa  $\alpha_*$  commuta con  $\partial_i$  e con  $j_{i-1}$ , inoltre ha grado  $(-1)^i$  come mappa  $S^{i-1} \rightarrow S^{i-1}$ . Ne segue:

$$d_i \circ \alpha_* = j_{i-1} \circ \partial_i \circ \alpha_* = j_{i-1} \circ \alpha_* \circ \partial_i = (-1)^i j_{i-1} \circ \partial_i = (-1)^i d_i$$

dunque si ha  $\alpha_*x^i + (-1)^{i+1}x^i \in \ker(d_i)$ .

Per il Teorema 5.6  $j_{i-1}$  è iniettiva, dunque  $\ker(d_i) = \ker(\partial_i)$ , e dalla successione della coppia  $(S^i, S^{i-1})$  si vede che  $\ker(\partial_i)$  (e quindi anche  $\ker(d_i)$ ) ha rango 1 per  $i = 1, \dots, n-1$ . In particolare ne segue che  $d_ix^i \neq 0$  per ogni  $i$ , perché altrimenti

$$d_i(\alpha_*x^i) = (-1)^i d_i(x^i) = 0 \implies \text{rk}(\ker(d_i)) = 2 \quad \zeta$$

Ne segue che  $\ker(d_{i-1}) = \text{Im}(d_i)$  è generato da  $d_i(x^i)$ .

Osserviamo che anche  $\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}$  genera  $\ker(d_{i-1})$ , infatti:

$$d_{i-1}(ax^{i-1} + b\alpha_*x^{i-1}) = 0 \xrightarrow{d_{i-1}\alpha_* = (-1)^{i-1}d_{i-1}} (a + (-1)^{i-1}b)d_{i-1}x^{i-1} = 0$$

ma  $d_{i-1}(x^{i-1}) \neq 0$ , quindi  $a = (-1)^ib$ , cioè  $ax^{i-1} + b\alpha_*x^{i-1}$  è multiplo di  $\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}$ . Ma allora i due generatori sono uguali a meno del segno:  $d_{i+1}(x^{i+1}) = \pm(\alpha_*x^i + (-1)^{i+1}x^i)$ .  $\square$

Vedendo  $\mathbb{R}P^n$  come unione di una  $i$ -cella per  $i = 0, \dots, n$ , abbiamo allora che la proiezione al quoziente da  $S^n$  a  $\mathbb{R}P^n$  agisce mandando omeomorficamente ogni coppia di  $i$ -celle di  $S^n$  nell'unica  $i$ -cella di  $\mathbb{R}P^n$ .

**Teorema 5.13** Il complesso algebrico associato a  $\mathbb{R}P^n$  è

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^{n-1}} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\text{per cui } H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 < q < n \text{ e } 2 \nmid q \\ 0 & 2 \mid q \text{ oppure } q > n \end{cases}, \quad H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & 2 \mid n \\ \mathbb{Z} & 2 \nmid n \end{cases}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa di proiezione  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  che identifica i punti antipodali. Il complesso cellulare di  $S^n$  è

$$C_i^{CW}(S^n) = H_i(S^i, S^{i-1}) \simeq H_i(D_+^i, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-^i, S^{i-1}) = \langle x^i \rangle \oplus \langle \alpha_*x^i \rangle$$

Invece, il complesso cellulare di  $\mathbb{R}P^n$  è

$$C_i^{CW}(\mathbb{R}P^n) = H_i(D^i, S^{i-1}) = \langle y^i \rangle$$

e possiamo scegliere il generatore  $y^i$  in modo che  $\pi(x^i) = y^i = \pi(\alpha_*x^i)$ . Ma allora

$$d_i y^i = d_i(\pi(x^i)) = \pi(d_i x^i) \stackrel{L.5.12}{=} \pm \pi(\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}) = \pm(1 + (-1)^i)y^{i-1}$$

dunque il complesso algebrico è esattamente quello indicato nell'enunciato. Segue anche immediatamente che i gruppi di omologia sono quelli dell'enunciato.  $\square$

**Osservazione.** Il proiettivo reale è il primo esempio in cui incontriamo uno spazio con gruppi di omologia non banali e finiti.



## Chapter 6

# Omologia e Co-omologia a Coefficienti in un Modulo

Siano  $A, B$  moduli su un anello  $R$ :  $A \otimes_R B$  è il modulo generato dagli elementi  $a \otimes b$  con  $a \in A, b \in B$  e con relazioni  $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$ ,  $a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b$  e  $a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2)$ .

Sia  $C. = (C_n, \partial_n)$  un complesso di catene di gruppi abeliani liberi, ad esempio  $C. = C.(X)$  il complesso delle catene singolari,  $G$  un gruppo abeliano (o un anello). Dalla successione del complesso, tensorizzando per  $G$  si ha il complesso  $C. \otimes G$ :

$$\dots \longrightarrow C_{i+1} \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes Id_G} C_i \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes Id_G} C_{i-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

**Definizione 39** Dato  $X$  spazio topologico, l'omologia singolare a coefficienti in  $G$  di  $X$  è

$$H.(X; G) := H.(C.(X) \otimes G)$$

Dunque a  $X$  associamo  $C.(X; G)$  e  $H.(X; G)$ , e alla coppia  $(X, A)$  associamo  $C.(X, A; G)$  e  $H.(X, A; G)$ , e quello definito è un funtore covariante.

**Osservazione.** Possiamo considerare anche l'associazione  $G \mapsto H.(X; G)$ , ed è un funtore covariante.

**Osservazione.**  $H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X)$ .

Consideriamo ora  $A, B, C$  gruppi abeliani che formano una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Abbiamo i due seguenti risultati:

**Lemma 6.1** Anche la seguente successione è esatta:

$$A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

**Lemma 6.2** Supponiamo  $C$  gruppo libero. Allora anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta mostrare che esiste una sezione  $s : C \rightarrow B$ , da cui  $B = A \oplus s(C)$ , per cui si ha  $B \otimes G = (A \otimes G) \oplus (C \otimes G)$ . Una tale  $s$  esiste perché  $C$  libero.  $\square$

Rifacciamo la costruzione usando il funtore  $\text{Hom}(-, G)$  invece che  $- \otimes G$ :  
 Sia  $C_\bullet = (C_n, \partial_n)$  complesso di catene di gruppi abeliani liberi, ad esempio  $C_\bullet = C_\bullet(X)$  il complesso delle catene singolari,  $G$  gruppo abeliano (o un anello). Dalla successione del complesso, usando  $\text{Hom}(-, G)$ :

$$\dots \longleftarrow \text{Hom}(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\delta^n} \text{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{\delta^{n-1}} \text{Hom}(C_{n-1}, G) \longleftarrow \dots$$

dove per  $\varphi \in \text{Hom}(C_{n-1}, G)$  si definisce  $\delta^{n-1}(\varphi) := (-1)^n \varphi \circ \partial_n$ .

**Definizione 40** Dato  $X$  spazio topologico, la *co-omologia singolare a coefficienti in  $G$*  di  $X$  è

$$H^i(X; G) = \ker \delta^i / \text{Im} \delta^{i-1} = H_i(\text{Hom}(C_\bullet(X), G))$$

Notazione:  $\ker \delta^n = Z^n$  sono gli  $n$ -cocicli,  $\text{Im} \delta^{n-1} = B^n$  sono gli  $n$ -cobordi.  
 Come sopra, a  $X$  associamo  $C^\bullet(X; G)$  e  $H^\bullet(X; G)$ , alla coppia  $(X, A)$  associamo  $C^\bullet(X, A; G)$  e  $H^\bullet(X, A; G)$ , ed è un funtore controvariante.

**Osservazione.** Possiamo considerare l'associazione  $G \mapsto H^\bullet(X; G)$ , e questo è un funtore covariante.

Consideriamo ora  $A, B, C$  gruppi abeliani che formano una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Abbiamo i due seguenti risultati:

**Lemma 6.3** Anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, G) \longrightarrow \text{Hom}(B, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, G)$$

**Lemma 6.4** Supponiamo  $C$  gruppo libero. Allora anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, G) \longrightarrow \text{Hom}(B, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta mostrare che esiste una sezione  $s : C \rightarrow B$ , da cui  $B \simeq A \oplus C$ , per cui si ha  $\text{Hom}(B, G) = \text{Hom}(A, G) \oplus \text{Hom}(C, G)$ . Una tale  $s$  esiste perché  $C$  libero.  $\square$

**Osservazione.** Tutto quanto detto in termini di gruppi/ $\mathbb{Z}$  si ridice in termini di moduli/PID.

## 6.1 Funtori Tor e Ext

Consideriamo  $R$  PID,  $A$  un  $R$ -modulo. Nella categoria degli  $R$ -moduli abbiamo:

**Definizione 41** Una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è una risoluzione libera di  $A$  se  $F_0$  è libero.

**Esempio 6** (Risoluzione Libera Standard) Consideriamo  $F(A)$  l' $R$ -modulo libero generato da elementi di  $A$ , e la mappa  $F(A) \rightarrow A$  data da  $\sum n_a[a] \mapsto \sum n_a a$ . Sia  $K(A)$  il nucleo della mappa descritta. Allora è esatta la successione corta

$$0 \longrightarrow K(A) \longrightarrow F(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

ed è detta *risoluzione libera standard* di  $A$  come  $R$ -modulo.

**Definizione 42** Dato  $G$  un  $R$ -modulo, definiamo

$$\text{Tor}(A, G) := \ker \left( K(A) \otimes G \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_G} F(A) \otimes G \right),$$

dove  $i$  è l'inclusione di  $K(A)$  in  $F(A)$ .

**Lemma 6.5** Dato  $f : A \rightarrow A'$  omomorfismo e due risoluzioni libere (righe del diagramma), esistono mappe  $f_0, f_1$  tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i} & F_0 & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{i'} & F'_0 & \xrightarrow{p'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Inoltre, se  $f'_0, f'_1$  sono un'altra coppia di omomorfismi che fa commutare, allora esiste  $s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che  $f_0 - f'_0 = i' \circ s$ ,  $f_1 - f'_1 = s \circ i$ .

*Dimostrazione.* Cominciamo definendo una  $f_0$  che faccia commutare:  $F_0$  è  $R$ -modulo libero, siano  $x_i$  de suoi generatori; poniamo, fissando una scelta,  $f_0(x_i) \in (p')^{-1}(fp(x_i))$ , e estendiamo a omomorfismo. Per commutatività e esattezza si ha

$$p' \circ f_0 \circ i = f \circ p \circ i = 0$$

dunque esiste un'unica  $f_1$  che faccia commutare il diagramma:  $(f_0 \circ i)(y_i) \in \ker(p') = \text{Im}(i')$ , dunque possiamo definire ( $i'$  iniettiva per esattezza)  $f_1(y_i) = (i')^{-1}(f_0 \circ i(y_i))$ .

Supponiamo ora che anche  $f'_0, f'_1$  facciano commutare il diagramma. Allora, per commutatività, si ha

$$p'(f_0 - f'_0) = p'f_0 - p'f'_0 = fp - fp = 0$$

cioè  $\text{Im}(f_0 - f'_0) \subseteq \ker(p') = \text{Im}(i')$ , dunque esiste  $s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che  $i's = f_0 - f'_0$ . Inoltre,

$$i'(f_1 - f'_1) = (f_0 - f'_0)i = i'si$$

ed essendo  $i'$  iniettiva si ha  $f_1 - f'_1 = si$ . □

Dunque, usando il Lemma 6.5, abbiamo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & \swarrow s & f_0 \downarrow & & \text{Id} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i'} & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & g_1 \downarrow & \swarrow s' & g_0 \downarrow & & \text{Id} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e  $\text{Tor}(A; G) = \ker(i \otimes \text{Id}_G)$ . Potremmo definire  $\underline{\text{Tor}}(A; G) = \ker(i' \otimes \text{Id}_G)$ , e avere

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & g_1 \circ f_1 \downarrow & & g_0 \circ f_0 \downarrow & & \text{Id} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per il Lemma 6.5 si ha che  $g_i \circ f_i$  sono omotope all'identità, e in omologia avremmo dunque l'identità. Scambiando i ruoli otteniamo l'identità anche nell'altro verso di composizione. Dunque si è mostrato:

**Proposizione 6.6** Il funtore  $Tor(A; G)$  è naturalmente isomorfo a  $\ker(F_1 \otimes G \rightarrow F_0 \otimes G)$  per qualsiasi risoluzione libera.

Proprietà:

1. Se  $A$  è abeliano libero allora  $Tor(A; G) = 0$ .
2.  $Tor(\mathbb{Z}_n; G) = \{g \in G : ng = 0\}$ .
3. Se  $G$  libero da torsione allora  $Tor(\mathbb{Z}_n; G) = 0$ .
4.  $Tor(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$  con  $d = \text{MCD}(n, m)$ .
5.  $Tor(A_1 \oplus A_2; G) = Tor(A_1; G) \oplus Tor(A_2; G)$ .

Diamo una definizione alternativa di  $Tor$ :

**Definizione 43** Sia  $0 \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{i} Q_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$  una risoluzione libera di  $G$ . Poniamo  $Tor'(A; G) = \ker(A \otimes Q_1 \xrightarrow{Id_A \otimes i} A \otimes Q_0)$

**Proposizione 6.7**  $Tor'(A; G) = Tor(A; G)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo risoluzioni libere  $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$  e  $0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ , da cui deduciamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & Tor(A; G) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_1 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Tor'(A; G) & \longrightarrow & A \otimes Q_1 & \longrightarrow & A \otimes Q_0 & \longrightarrow & A \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

(osservare che si possono mettere gli zeri perché si sta tensorizzando per gruppi liberi). Considerando il pezzo di diagramma dato dalle prime due righe: vedendo le colonne come complesso, applicando il Lemma del Serpente otteniamo la successione esatta lunga

$$0 = \ker \alpha \longrightarrow 0 = \ker \beta \longrightarrow \ker \gamma \longrightarrow \text{coker} \alpha \longrightarrow \text{coker} \beta \longrightarrow \text{coker} \gamma \longrightarrow$$

da cui:

$$Tor(A; G) = \ker \gamma = \ker(\text{coker} \alpha \rightarrow \text{coker} \beta) = \ker(A \otimes Q_1 \rightarrow A \otimes Q_0) = Tor'(A; G)$$

□

Allora è ben definito  $Tor(A; B) = A * B = B * A$ .

**Definizione 44** Data la risoluzione libera standard di  $A$ , definiamo

$$Ext(A; G) := \text{coker} \left( i^* : Hom(F(A), G) \rightarrow Hom(K(A), G) \right)$$



Come per  $Tor$ , si dimostra che  $Ext(A; G)$  non dipende dalla risoluzione libera che si usa. Proprietà:

1. Se  $A$  è abeliano libero allora  $Ext(A; G) = 0$ .
2.  $Ext(\mathbb{Z}_n; B) = B/nB$ .
3.  $Ext(\mathbb{Z}_n; B) = 0$  per  $B = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .
4.  $Ext(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$  con  $d = \gcd(n, m)$ .
5.  $Ext(A_1 \oplus A_2; G) = Ext(A_1; G) \oplus Ext(A_2; G)$ .

## 6.2 Coefficienti Universali

**Teorema 6.8** (dei Coefficienti Universali per l'Omologia)

Sia  $(C, \partial)$  complesso di catene di moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow 0$$

che è naturale e spezza, in particolare  $H_n(C \otimes G) \simeq (H_n(C) \otimes G) \oplus Tor(H_{n-1}(C); G)$ . Inoltre  $\alpha$  agisce nel seguente modo:  $[z] \otimes g \xrightarrow{\alpha} [z \otimes g]$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$ : Per ipotesi  $C$  è complesso di catene di moduli liberi su  $R$  PID, dunque  $Z_n, B_n$  sono liberi per ogni  $n \in N$ . In particolare, tensorizzando per  $G$ , per il Lemma 6.2 otteniamo ancora una successione esatta:

$$0 \longrightarrow Z_n \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0$$

Osserviamo che la successione di partenza spezza, perché  $B_{n-1}$  libero, e dunque anche la seconda spezza.

Consideriamo tutte le successioni al variare di  $n \in N$ , e otteniamo la successione di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & 0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_n \otimes G & \longrightarrow & C_n \otimes G & \longrightarrow & B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0 \\ & & \partial \otimes Id_G = 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & 0 = \partial \otimes Id_G \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & C_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & B_{n-2} \otimes G \longrightarrow 0 \\ & & 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & 0 \downarrow \end{array}$$

da cui segue una successione lunga in omologia. In particolare, essendo le colonne di sinistra e di destra aventi solo mappe nulle, in omologia gli elementi di tali colonne rimangono invariati. Si ottiene dunque

$$\dots \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{\varphi_n} Z_n \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{\varphi_{n-1}} Z_{n-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

e si verifica che i morfismi di connessione  $\varphi_n$  sono esattamente  $i_n \otimes Id_G$ , dove  $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$  è l'inclusione. Dalla successione esatta lunga si ottiene la seguente successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\varphi_n) \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow \text{ker}(\varphi_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0$ , e osserviamo che è una risoluzione libera di  $H_n(C)$ , per cui tensorizzando si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}(H_n(C_\bullet); G) \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes Id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes G \longrightarrow 0$$

e si ha  $\text{coker}(\varphi_n) = \text{coker}(i_n \otimes Id_G) = H_n(C_\bullet) \otimes G$ ,  $\text{ker}(\varphi_{n-1}) = \text{ker}(i_{n-1} \otimes Id_G) = \text{Tor}(H_{n-1}(C_\bullet); G)$ . Sostituendo quanto trovato nella successione lunga si ottiene la successione

$$0 \longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_\bullet \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C_\bullet); G) \longrightarrow 0$$

e  $\alpha$  agisce proprio come descritto nell'enunciato.

Resta da verificare che la successione spezzi: sia  $r : C_n \rightarrow Z_n$  proiezione che faccia spezzare la successione

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow[r]{\quad} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

La composizione

$$Z_n(C_\bullet \otimes G) \hookrightarrow C_n \otimes G \xrightarrow{r \otimes Id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes G = \text{coker}(i \otimes Id_G)$$

manda i bordi  $B_n(C_\bullet \otimes G)$  a 0 ( $r \otimes Id_G$  ci manda già  $B_n \otimes G$ ), quindi è indotta al quoziente una  $\rho : H_n(C_\bullet \otimes G) \rightarrow H_n(C_\bullet) \otimes G$  tale che  $\rho\alpha = Id$ , cioè  $\rho$  spezza la successione.

La naturalità segue dalla naturalità dei morfismi di connessione. □

**Teorema 6.9** (dei Coefficienti Universali per la Co-omologia)

Sia  $(C_\bullet, \partial)$  complesso di catene di moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet); G) \longrightarrow H^n(C_\bullet; G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \longrightarrow 0$$

che è naturale rispetto a morfismi di catene e rispetto a morfismi di moduli, e che spezza in modo naturale rispetto a  $G$  ma non rispetto a  $C$ . Inoltre  $\alpha$  agisce nel seguente modo:  $\alpha(\varphi)[c] = \varphi(c)$ .

*Dimostrazione.* Lavoriamo come fatto nella dimostrazione precedente: abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow[r]{\quad} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

da cui deduciamo, per il Lemma 6.4, la successione esatta

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(C_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G) \longleftarrow 0$$

e considerando tutte le successioni al variare di  $n \in \mathbb{N}$  otteniamo una successione esatta di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_n, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C_n, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B_{n-1}, G) \longleftarrow 0 \\ & & \delta=0 \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow 0=\delta \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_{n-1}, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C_{n-1}, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B_{n-2}, G) \longleftarrow 0 \\ & & 0 \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow 0 \end{array}$$

dalla quale si deduce la successione esatta lunga

$$\text{Hom}(B_n, G) \xleftarrow{d^n} \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G) \xleftarrow{d^{n-1}} \text{Hom}(Z_{n-1}, G)$$

e si verifica che  $d^n$  è l'omomorfismo indotto dall'inclusione  $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$ . Dalla successione esatta lunga si ricava la successione esatta

$$0 \longleftarrow \ker(d^n) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{coker}(d^{n-1}) \longleftarrow 0$$

Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C.) \longrightarrow 0$ , che è anche risoluzione libera di  $H_n(C.)$ , dalla quale si ricava la successione esatta

$$0 \longleftarrow \text{Ext}(H_n(C.); G) \longleftarrow \text{Hom}(B_n, G) \xleftarrow{d^n} \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(H_n(C.), G) \longleftarrow 0$$

Ma allora  $\ker(d^n) = \text{Hom}(H_n(C.), G)$ ,  $\text{coker}(d^n) = \text{Ext}(H_n(C.); G)$ , per cui la successione diventa (ricordarsi che nella successione si ha  $\text{coker}(d^{n-1})$ )

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(H_n(C.), G) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C.); G) \longleftarrow 0$$

che è la successione dell'enunciato.

Rimane da trattare lo spezzamento della successione: data  $r : C_n \rightarrow Z_n$  proiezione che spezza, abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^n(\text{Hom}(C., G)) & \longrightarrow & \text{Hom}(C_n, G) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(C_{n+1}, G) \\ & & & & \uparrow r^* & & \uparrow \partial^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(C.), G) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_n, G) & \xrightarrow{i^*} & \text{Hom}(B_n, G) \end{array}$$

e dato  $\varphi \in \ker(i^*)$  si trova che  $r^*(\varphi) \in \ker(\delta)$ . Ma allora è indotta una mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(H_n(C.), G) & \rightarrow & H^n(C.; G) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ r \end{array}$$

e questa fa spezzare la successione. Osservare che lo spezzamento dipende dalla scelta di  $r$ , e quindi non è naturale.  $\square$

**Corollario 6.10** Se  $H_{n-1}(C.)$  è libero,  $\alpha : H^n(C., G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C.), G)$  è isomorfismo.

Possiamo adattare il Teorema 6.9 al caso in cui il complesso  $C$  sia di co-catene:

**Corollario 6.11** Sia  $(C^*, \delta)$  complesso di cocatene di  $R$ -moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta che spezza:

$$0 \longrightarrow H^n(C^*) \otimes G \longrightarrow H^n(C^* \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(C^*), G) \longrightarrow 0$$

**Corollario 6.12** Se  $(C., \partial)$  complesso di catene di  $R$ -moduli liberi,  $G$   $R$ -modulo finitamente generato, allora si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow H^n(C.) \otimes G \longrightarrow H^n(C.; G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(C.), G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Poiché  $G$  è finitamente generato, si ha  $\text{Hom}(C_n, R) \otimes G \simeq \text{Hom}(C_n, G)$ , dunque è sufficiente usare il Corollario 6.11.  $\square$

Se  $H$  è finitamente generato vale che  $\text{Ext}(H; \mathbb{Z})$  è isomorfo alla parte di torsione di  $H$  e che  $\text{Hom}(H; \mathbb{Z})$  è isomorfo alla parte libera di  $H$ . Ne segue:

**Corollario 6.13** Se i gruppi di omologia  $H_n$  e  $H_{n-1}$  di un complesso di catene  $C.$  di gruppi abeliani liberi sono finitamente generati, con sottogruppi di torsione  $T_n \subset H_n$  e  $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ , allora vale che  $H^n(C.; \mathbb{Z}) \simeq (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$ .

### 6.3 Omologia e Co-omologia Relativa

Data una coppia  $(X, A)$ , si ha la successione esatta che spezza  $(C_n(X, A)$  libero)

$$0 \longrightarrow C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\quad} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{s}$

e tensorizzando si ottiene

$$0 \longrightarrow C_n(A; G) \longrightarrow C_n(X; G) \longrightarrow C_n(X, A; G) \longrightarrow 0$$

da cui si ottiene la successione esatta lunga in omologia a coefficienti in  $G$ . Analogamente, dato lo spezzamento, si ha la successione esatta corta anche applicando il funtore  $Hom$ :

$$0 \longleftarrow C^n(A; G) \longleftarrow C^n(X; G) \longleftarrow C^n(X, A; G) \longleftarrow 0$$

e quindi anche in co-omologia vale la successione esatta lunga della coppia.

### 6.4 Mayer-Vietoris a Coefficienti in $G$

Consideriamo ora la seguente (successione esatta di gruppi liberi):

$$0 \longrightarrow C_n^u(X) \xleftarrow{i} C_n(X) \longrightarrow C_n(X)/C_n^u(X) \longrightarrow 0$$

Se poi passiamo alla successione esatta lunga in omologia, sfruttando  $H_n^u(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X)$ , abbiamo che  $H_n(C_n(X)/C_n^u(X)) = 0$ , allora tensorizzando o applicando  $Hom$  si ha che Mayer-Vietoris si applica anche per l'omologia e la co-omologia a coefficienti in un gruppo  $G$ . Esplicitamente, Mayer-Vietoris si scrive:

1. In omologia:

$$\longrightarrow H_n(A \cap B; G) \longrightarrow H_n(A; G) \oplus H_n(B; G) \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B; G) \longrightarrow$$

2. In co-omologia:

$$\longleftarrow H^n(A \cap B; G) \longleftarrow H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow H^{n-1}(A \cap B; G) \longleftarrow$$

Esempi:  $H^i(S^n; G) = \begin{cases} G & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases}$ ,  $H^i(\mathbb{C}P^n; G) = \begin{cases} G & i \leq n, 2|i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ,  $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

# Chapter 7

## Prodotto CUP ( $\smile$ )

Sia  $A$  anello commutativo. Vogliamo definire una mappa  $A$ -bilineare

$$H^i(X; A) \times H^j(X; A) \xrightarrow{\smile} H^{i+j}(X; A)$$

che renda  $H^\bullet(X; A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X; A)$  un anello graduato con prodotto graded-commutative, cioè dati  $a \in H^i(X; A)$ ,  $b \in H^j(X; A)$  e posti  $|a| = i$ ,  $|b| = j$  (*grado*), si ha  $a \smile b = (-1)^{|a| \cdot |b|} b \smile a$ .

### 7.1 Teorema di Eilenberg-Zilber

Dati  $(C_\bullet, d_C)$  e  $(D_\bullet, d_D)$  complessi di catene, il complesso  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è il dato di  $(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$  e  $d_n : (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n \rightarrow (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n-1}$  dato da  $d_n(\alpha \otimes \beta) = d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes d_D(\beta)$ .

**Definizione 45** Un complesso  $(C_\bullet, d)$  è *contraibile* se  $Id_C$  omotopa a 0, in particolare dunque  $H_*(C_\bullet) = 0$ .

**Proposizione 7.1** Dati  $C_\bullet, D_\bullet$  complessi algebrici di cui uno è contraibile,  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è contraibile.

*Dimostrazione.* Siano  $(C_\bullet, d_C)$ ,  $(D_\bullet, d_D)$  complessi come da ipotesi, supponiamo senza perdita di generalità che  $C_\bullet$  sia contraibile. Allora esiste  $k : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$  omomorfismo di grado +1 omotopia tra  $Id_C$  e 0, cioè  $Id_C = d_C k + k d_C$ . Consideriamo il complesso  $(C_\bullet \otimes D_\bullet, d)$  e la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \tilde{k} : (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n &\rightarrow (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n+1} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto k(\alpha) \otimes \beta \end{aligned}$$

Sia  $\alpha \in C_p$ ,  $\beta \in D_{n-p}$ . Allora:

$$\begin{aligned} \tilde{d}k(\alpha \otimes \beta) &= d(k(\alpha) \otimes \beta) = d_C k(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{p+1} k(\alpha) \otimes d_D(\beta) \\ \tilde{k}d(\alpha \otimes \beta) &= \tilde{k}(d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes d_D(\beta)) = k d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p k(\alpha) \otimes d_D(\beta) \end{aligned}$$

e sommando le due equazioni si ottiene

$$(\tilde{d}k + \tilde{k}d)(\alpha \otimes \beta) = (d_C k(\alpha) + k d_C(\alpha)) \otimes \beta = \alpha \otimes \beta$$

cioè  $\tilde{k}$  è omotopia tra  $Id$  e 0, cioè  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è contraibile. □

**Corollario 7.2** 1. Se  $X$  è contraibile,  $\tilde{C}_\bullet(X) \otimes \tilde{C}_\bullet(X)$  è contraibile.

2. Se uno tra  $X$  e  $Y$  è contraibile allora  $\tilde{C}_\bullet(X) \otimes \tilde{C}_\bullet(Y)$  è contraibile.

3. Se  $X$  e  $Y$  sono contraibili, allora  $C.(X) \otimes C.(Y)$  è aciclico<sup>1</sup>.

*Dimostrazione.* Le affermazioni 1. e 2. seguono dalla Proposizione 7.1. Dimostriamo 3.: per prima cosa osserviamo che essendo  $X$  e  $Y$  contraibili il complesso  $C.(X) \oplus C.(Y)$  è aciclico, infatti: consideriamo la successione esatta corta di complessi<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[+1] & \longrightarrow & \widetilde{C}.(X) \oplus \widetilde{C}.(Y) & \longrightarrow & C.(X) \oplus C.(Y) \longrightarrow 0 \\
 & & 1 & \longmapsto & (1, -1) & & 
 \end{array}$$

che possiamo vedere più esplicitamente espandendola come segue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \longrightarrow & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \longrightarrow & 0 \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \longrightarrow & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \longrightarrow & 0 \\
 \partial \downarrow & & \varepsilon \downarrow \quad \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon + \varepsilon' & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

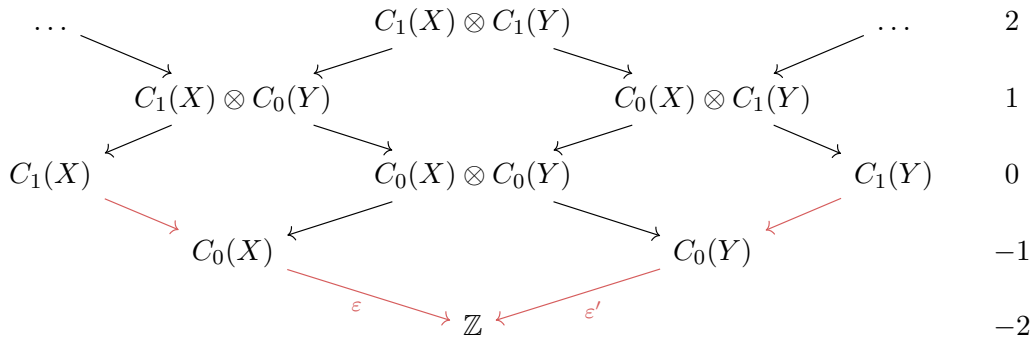
La successione esatta lunga in omologia che se ne ricava dà esattamente l'aciclicità di  $C.(X) \oplus C.(Y)$ . Consideriamo ora la seguente successione di complessi:

$$0 \longrightarrow C.(X) \oplus C.(Y)[1] \longrightarrow \widetilde{C}.(X) \otimes \widetilde{C}.(Y) \longrightarrow C.(X) \otimes C.(Y) \longrightarrow 0$$

mostriamo che è esatta e questo dà la tesi, infatti: essendo  $\widetilde{C}.(X) \otimes \widetilde{C}.(Y)$  contraibile, passando alla successione esatta lunga in omologia si trova che

$$H_i(C.(X) \otimes C.(Y)) \simeq H_{n-1}(C.(X) \oplus C.(Y)[1]) = H_n(C.(X) \oplus C.(Y))$$

cioè il complesso  $C.(X) \otimes C.(Y)$  è aciclico. Mostriamo dunque l'esattezza della successione. Abbiamo:



(sulla destra ci sono i gradi<sup>3</sup>). Raggruppando in somma diretta orizzontalmente otteniamo il complesso  $\widetilde{C}.(X) \otimes \widetilde{C}.(Y)$ , proiettare su  $C.(X) \otimes C.(Y)$  equivale a mandare a 0 la parte di diagramma in rosso, e raggruppando la parte in rosso in somma diretta orizzontalmente otteniamo esattamente il complesso  $C.(X) \oplus C.(Y)$ . Questo mostra l'esattezza della successione, che come detto conclude.  $\square$

<sup>1</sup>Cioè ha omologia banale in grado  $> 0$ .

<sup>2</sup>Usiamo la seguente notazione: se  $D$  è un complesso,  $D[k]$  è il complesso ottenuto aumentando tutti i gradi di  $k$  (cioè  $D[k]_i = D_{i+k}$ ). Nella successione,  $\mathbb{Z}$  è il complesso con  $\mathbb{Z}$  in grado 0 e nullo altrove, quindi  $\mathbb{Z}[-1]$  è il complesso con  $\mathbb{Z}$  in grado  $-1$  e nullo altrove.

<sup>3</sup>Osservare che  $C_2(X)$  è in grado 1 perché in effetti sarebbe  $C_2(X) \otimes \mathbb{Z}$ , con  $\mathbb{Z}$  in grado  $-1$ . Analogamente per gli altri.

**Teorema 7.3** (Eilenberg-Zilber) Per  $X, Y$  spazi topologici, la mappa naturale

$$\begin{aligned} EZ_0 : C_0(X \times Y) &\rightarrow C_0(X) \otimes C_0(Y) \\ (p, q) &\mapsto p \otimes q \end{aligned}$$

si estende a morfismo di complessi  $EZ : C.(X \times Y) \rightarrow C.(X) \otimes C.(Y)$  che induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Vogliamo usare il Teorema 2.26 per funtori liberi e aciclici:  $C.(X) \otimes C.(Y)$  e  $C.(X \times Y)$  sono funtori  $Top \times Top \rightarrow \mathcal{CH}_+$  (categoria dei complessi di catene), e coincidono naturalmente nell' $H_0$  tramite  $EZ_0$ . Per  $(C.(-) \otimes C.(-))_n$  usiamo come base gli spazi  $(\Delta^k, \Delta^{n-k})$  e elementi  $Id \times Id$ . In questo modo il funtore è libero e aciclico (i  $\Delta^i$  sono contraibili, si applica dunque il Corollario 7.2).

Per  $C_n(- \times -)$  usiamo come base gli spazi  $\Delta^n \times \Delta^n$ , con elemento la mappa diagonale  $\Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ . In questo modo il funtore è libero e aciclico ( $\Delta^n \times \Delta^n$  contraibile).

Dunque, per il Teorema 2.26,  $EZ_0$  e la sua inversa  $Q_0$  si estendono a morfismi naturali

$$EZ : C.(X \times Y) \rightarrow C.(X) \otimes C.(Y), \quad Q : C.(X) \otimes C.(Y) \rightarrow C.(X \times Y)$$

Inoltre,  $EZ \circ Q$ ,  $Q \circ EZ$  sono morfismi naturali che in grado 0 sono l'identità. Ma allora, sempre per il Teorema 2.26, le due composizioni sono omotope all'identità. Dunque passando all'omologia le composizioni sono l'identità, cioè i morfismi indotti in omologia da  $EZ$  e da  $Q$  sono isomorfismi.  $\square$

**Teorema 7.4** (Eilenberg-Zilber relativo) Per trasformazioni naturali  $EZ, Q$  come sopra e coppie  $(X, A), (Y, B)$  abbiamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C.(A) \otimes C.(Y) + C.(X) \otimes C.(B) & \longrightarrow & C.(X) \otimes C.(Y) & \longrightarrow & C.(X, A) \otimes C.(Y, B) \longrightarrow 0 \\ & & \begin{array}{c} Q' \downarrow \uparrow EZ' \\ \phantom{Q'} \end{array} & & \begin{array}{c} Q \downarrow \uparrow EZ \\ \phantom{Q} \end{array} & & \begin{array}{c} Q'' \downarrow \uparrow EZ'' \\ \phantom{Q''} \end{array} \\ 0 & \longrightarrow & C.(A \times Y) + C.(X \times B) & \longrightarrow & C.(X \times Y) & \longrightarrow & \frac{C.(X \times Y)}{C.(A \times Y) + C.(X \times B)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

e tutte le mappe verticali inducono isomorfismi in omologia.

*Dimostrazione.* Per naturalità le mappe  $EZ$  e  $Q$  si restringono bene, cioè  $EZ(C.(A) \otimes C.(Y)) \subseteq C.(A \times Y)$ , e analogo con  $Q$ . In particolare  $EZ', Q'$  sono indotte dalla restrizione di  $EZ$  e  $Q$ ,  $EZ'', Q''$  sono quelle indotte dal passaggio al quoziente.

Notiamo per prima cosa che le mappe verticali di sinistra  $Q'$  e  $EZ'$  inducono isomorfismi in omologia. Questo perché per naturalità le mappe

$$C.(A) \otimes C.(B) \xrightleftharpoons[EZ']{Q'} C.(A \times B), \quad C.(A) \otimes C.(Y) \xrightleftharpoons[EZ']{Q'} C.(A \times Y), \quad C.(X) \otimes C.(B) \xrightleftharpoons[EZ']{Q'} C.(X \times B),$$

inducono tutte isomorfismi in omologia che commutano con le mappe delle successioni esatte

$$0 \rightarrow C.(A) \otimes C.(B) \rightarrow C.(X) \otimes C.(B) \oplus C.(A) \otimes C.(Y) \rightarrow C.(X) \otimes C.(B) + C.(A) \otimes C.(Y) \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow C.(A \times B) \rightarrow C.(X \times B) \oplus C.(A \times Y) \rightarrow C.(X \times B) + C.(A \times Y) \rightarrow 0.$$

Dunque applicando il Teorema 1.2 (omomorfismo di connessione) otteniamo due successioni esatte lunghe di omologia in cui ogni tre termini due sono isomorfi. Per il Lemma 2.30 (Lemma dei Cinque) segue che  $Q'$  e  $EZ'$  inducono anche l'isomorfismo

$$H.(C.(X) \otimes C.(B) + C.(A) \otimes C.(Y)) \simeq H.(C.(X \times B) + C.(A \times Y)).$$

Dunque le mappe verticali al centro e a sinistra del diagramma nell'enunciato del teorema inducono isomorfismi in omologia. Ne segue, applicando di nuovo il Teorema 1.2 e quindi Lemma 2.30, che anche le mappe verticali della parte destra del diagramma inducono isomorfismi in omologia.  $\square$

**Osservazione.** Se si può usare Mayer-Vietoris, cioè  $(A \times Y) \cup (X \times B) = (A \overset{\circ}{\times} Y) \cup (X \overset{\circ}{\times} B)$ , allora si ha che  $H_*(C_*(A \times Y) + C_*(X \times B)) \simeq H_*(C_*(A \times Y \cup X \times B))$ , da cui abbiamo che

$$H_*(C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B)) \simeq H_*(C_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B))$$

Poniamo  $H_*((X, A) \times (Y, B)) := H_*(C_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B))$

## 7.2 Formula di Kunneth

**Teorema 7.5** (Formula di Kunneth) Siano  $C, D$  complessi di  $R$ -moduli,  $C$  libero. Si ha la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} H_i(C) * H_j(D) \longrightarrow 0$$

Inoltre, se  $D$  è libero allora la successione spezza.

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta corta  $0 \rightarrow Z_n(C) \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1}(C) \rightarrow 0$  (di moduli liberi perché  $C$  libero) e tensorizziamo per  $D$ , otteniamo dunque la successione esatta

$$0 \longrightarrow (Z(C) \otimes D)_n \longrightarrow (C \otimes D)_n \longrightarrow (B(C) \otimes D)_{n-1} \longrightarrow 0$$

da cui, passando in omologia, si deduce la successione esatta lunga

$$H_n(B(C) \otimes D) \xrightarrow{\alpha_n} H_n(Z(C) \otimes D) \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow H_{n-1}(B(C) \otimes D) \xrightarrow{\alpha_{n-1}} H_{n-1}(Z(C) \otimes D)$$

e si verifica che il morfismo di connessione è  $\alpha_n = (i_n \otimes Id)_*$ , dove  $i_n : B_n(C) \hookrightarrow Z_n(C)$ . Dall'esattezza della successione lunga deduciamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\alpha_n) \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow \ker(\alpha_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Studiamo  $\text{coker}(\alpha_n)$  e  $\ker(\alpha_{n-1})$ . Poiché  $Z(C)$  è libero si ha

$$\begin{aligned} (Z(C) \otimes Z(D))_n &= \ker(Id \otimes \partial : (Z(C) \otimes D)_n \rightarrow (Z(C) \otimes D)_{n-1}) \\ (Z(C) \otimes B(D))_n &= \text{Im}(Id \otimes \partial : (Z(C) \otimes D)_{n+1} \rightarrow (Z(C) \otimes D)_n) \end{aligned}$$

e lo stesso vale con  $B(C)$  (anch'esso libero) al posto di  $Z(C)$ . Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} H(Z(C) \otimes D) &\simeq Z(C) \otimes H(D) \\ H(B(C) \otimes D) &\simeq B(C) \otimes H(D) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Consideriamo ora la successione esatta corta  $0 \rightarrow B(C) \xrightarrow{i} Z(C) \rightarrow H(C) \rightarrow 0$  e tensorizziamo per  $H(D)$ . Osserviamo che quella scritta è una risoluzione libera di  $H(C)$ , per cui manteniamo l'esattezza aggiungendo all'inizio un opportuno *Tor*:

$$0 \longrightarrow H(C) * H(D) \longrightarrow B(C) \otimes H(D) \xrightarrow{i \otimes Id} Z(C) \otimes H(D) \longrightarrow H(C) \otimes H(D) \longrightarrow 0$$



dalla quale, per l'equazione (7.1), si ha

$$0 \longrightarrow H(C) * H(D) \longrightarrow H(B(C) \otimes D) \xrightarrow{(i \otimes Id)_*} H(Z(C) \otimes D) \longrightarrow H(C) \otimes H(D) \longrightarrow 0$$

da cui segue  $\text{coker}(\alpha_n) = (H(C) \otimes H(D))_n$ ,  $\ker(\alpha_{n-1}) = (H(C) * H(D))_{n-1}$ .

Supponiamo ora che anche  $D$  sia libero. Scegliamo delle retrazioni  $r : C_n \rightarrow Z_n(C)$  e  $s : D_n \rightarrow Z_n(D)$ . Allora la mappa  $(C \otimes D)_n \rightarrow H(C) \otimes H(D)$ , data da  $c \otimes d \mapsto [r(c)] \otimes [s(d)]$  manda i bordi di  $(C \otimes D)_n$  in zero e induce una retrazione  $\rho : H_n(C \otimes D) \rightarrow (H(C) \otimes H(D))_n$  per la mappa  $(H(C) \otimes H(D))_n \rightarrow H_n(C \otimes D)$  della successione di Kunnetth.  $\square$

In particolare, usando  $C = C.(X)$ ,  $D = C.(Y)$  e Eilenberg-Zilber si ottiene

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(C; R) \otimes H_j(D; R) &\longrightarrow H_n(C \otimes D; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} H_i(C; R) * H_j(D; R) \rightarrow 0 \\ &\quad \downarrow \simeq_{Q=EZ^{-1}} \\ &H_n(C \times D; R) \end{aligned}$$

Sappiamo inoltre che spazi con omologia libera hanno  $Tor$  banale, dunque per tali spazi si ha l'isomorfismo

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \xrightarrow{\simeq} H_n(X \times Y)$$

**Fatto 7.6** 1. Se  $C, D$  complessi di  $R$ -moduli,  $\varphi : C \rightarrow D$  morfismo di complessi che induce un isomorfismo in omologia, allora  $\varphi^* : Hom(D, R) \rightarrow Hom(C, R)$  induce un isomorfismo in co-omologia.

2. (Formula di Kunnetth in Co-omologia) Siano  $C, D$  complessi di  $R$ -moduli liberi, con almeno uno tra  $H^\bullet(C; R)$  e  $H^\bullet(D; R)$  finitamente generato in ogni grado. Allora si ha la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(C; R) \otimes H^j(D; R) \rightarrow H^n(C \otimes D; R) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} H^i(C; R) * H^j(D; R) \rightarrow 0$$

Analogamente a quanto visto in omologia, usando  $C = C.(X)$ ,  $D = C.(Y)$  e Eilenberg-Zilber, anche in co-omologia si ha

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(C; R) \otimes H^j(D; R) &\longrightarrow H^n(C \otimes D; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} H^i(C; R) * H^j(D; R) \rightarrow 0 \\ &\quad \downarrow \simeq_{EZ} \\ &H^n(C \times D; R) \end{aligned}$$

e per spazi con co-omologia libera si ha l'isomorfismo

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \xrightarrow{\simeq} H^n(X \times Y)$$

**Teorema 7.7** Sia  $R$  PID, uno tra  $H.(X, A; R)$  e  $H.(Y, B; R)$  finitamente generato in ogni grado. Se le coppie sono tali che valga Mayer-Vietoris per  $A \times Y$ ,  $X \times B$ , allora si ha la successione esatta corta naturale

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, A; R) \otimes H^j(Y, B; R) \rightarrow H^n((X, A) \times (Y, B); R) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} H^i(X, A; R) * H^j(Y, B; R) \rightarrow 0$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 7.5 (formula di Kunneth), usando il complesso delle cocatene. L'unica cosa aggiuntiva è verificare che valga

$$\text{Hom}(C, R) \otimes H^n(D; R) \simeq \text{Hom}(C, H^n(D; R))$$

e questo è vero se  $H^n(D; R)$  è finitamente generato, che è vero per ipotesi.  $\square$

Stiamo dunque collegando prodotto in co-omologia con prodotto tensoriale. Costruiamo esplicitamente  $\Delta : C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ .

### 7.3 Approssimazione Diagonale e Prodotto CUP

La mappa diagonale  $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ ,  $x \mapsto (x, x)$  induce sul complesso delle catene singolari una mappa  $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X \times X)$ . Tramite il morfismo di Eilenberg-Zilber abbiamo dunque

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(X) & \xrightarrow{\Delta} & C_\bullet(X \times X) \\ & \searrow \tilde{\Delta} & \downarrow EZ \\ & & C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \end{array}$$

Nel Teorema 7.3 (Eilenberg-Zilber) si ha l'esistenza dei morfismi  $EZ, Q$  che però rimangono impliciti. Vogliamo però definire un'approssimazione diagonale esplicita  $\tilde{\Delta} : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$ .

**Osservazione.** Analogamente a come si fa nella dimostrazione del Teorema 7.3 (Eilenberg-Zilber), si mostra che due qualsiasi omomorfismi  $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$  che in grado 0 sono  $x \mapsto x \otimes x$  sono omotopi.

Siano ora  $p, q \leq n$ , e consideriamo le due seguenti mappe affini:

$$\begin{array}{ccc} a_p : \Delta^p & \rightarrow & \Delta^n \\ e_i & \mapsto & e_i \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} b_q : \Delta^q & \rightarrow & \Delta^n \\ e_i & \mapsto & e_{n-q+i} \end{array}$$

Dato  $\sigma \in C_n(X)$  un  $n$ -simplex definiamo  $\sigma_p^1 = \sigma \circ a_p \in C_p(X)$  e  $\sigma_q^2 = \sigma \circ b_q \in C_q(X)$ . Definiamo  $\tilde{\Delta} : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$  nel seguente modo: per  $\sigma$  in  $C_n(X)$  poniamo

$$\tilde{\Delta}\sigma = \sum_{p+q=n} \sigma_p^1 \otimes \sigma_q^2$$

poi per linearità estendiamo a tutto  $C_\bullet(X)$ .

In grado 0 si ha  $\tilde{\Delta} = EZ_0 \circ \Delta$ , dunque per verificare che è un'approssimazione della diagonale basta verificare che sia un morfismo di complessi: sono conti, consigliato farli una volta nella vita. Quella costruita è l'approssimazione diagonale di *Alexander-Whitney*

Dato  $R$  PID abbiamo che sulle cocatene è indotta da  $\tilde{\Delta}$  la mappa *cup-product*:

$$\begin{array}{ccc} C^p(X; R) \otimes C^q(X; R) & \rightarrow & C^{p+q}(X; R) \\ (\varphi \otimes \psi) & \mapsto & \varphi \smile \psi \end{array}$$

data da:  $(\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X) \xrightarrow{\varphi \smile \psi} (-1)^{pq} \varphi(\sigma_p^1) \psi(\sigma_q^2) \in R$ . Esplicitamente:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \varphi(\sigma_{|[e_0, \dots, e_p]}) \psi(\sigma_{|[e_p, \dots, e_{p+q}]})$$

**Proposizione 7.8** La mappa cup è morfismo di catene:  $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^{|\varphi|}\varphi \smile \delta\psi$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è lasciata al volenteroso lettore che ha voglia di fare i conti. In alternativa, è presente una nota sulla pagina e-learning del corso (A.A. 2022/2023).  $\square$

Ne segue che la mappa cup-product passa alla co-omologia, dando quindi

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) & \rightarrow & H^{p+q}(X; R) \\ [\varphi] \otimes [\psi] & \mapsto & [\varphi \smile \psi] \end{array}$$

**Proposizione 7.9** Il prodotto cup è commutativo a meno del segno.

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{\sigma} := \sigma_{[e_n, e_{n-1}, \dots, e_1, e_0]}$ . Consideriamo la mappa

$$\rho : C_n(X) \rightarrow C_n(X) \quad \text{data da} \quad \sigma \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{\sigma}$$

La mappa  $\rho$  è naturalmente omotopa all'identità, perché è un morfismo di complessi che coincide con l'identità in grado 0 (si usa il Teorema 2.26 sui funtori liberi e aciclici). In co-omologia abbiamo

$$\rho^* \varphi \smile \rho^* \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \rho^*(\psi \smile \varphi)$$

infatti: è immediato verificare che l'uguaglianza valga a meno del segno, e che il segno sia proprio quello discende valutando il segno complessivo dei due membri: sia  $|\varphi| = p$ ,  $|\psi| = q$ , allora:

Il membro di sinistra ha segno

$$(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} = (-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q}{2}}$$

Il membro di destra ha segno

$$(-1)^{pq} \cdot (-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} = (-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q+4pq}{2}}$$

I due esponenti differiscono di un termine pari, per cui il segno è lo stesso.

Come detto,  $\rho$  è omotopa all'identità, dunque si ha

$$\varphi \smile \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \psi \smile \varphi$$

che è la tesi.  $\square$

### 7.3.1 In Co-omologia Relativa

In co-omologia relativa abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) & \longrightarrow & H^*(X \times X, X \times B \cup A \times X) \\ & \searrow \smile & \downarrow \Delta \\ & & H^*(X, A \cup B) \end{array}$$

con la mappa orizzontale data dalla formula di Kunneth in co-omologia relativa (Teorema 7.7). Osservare che si va da coppie  $(X, \underline{A})$ ,  $(X, \underline{B})$  alla coppia  $(X, \underline{A \cup B})$ .

**Osservazione.** Supponiamo  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Consideriamo la successione della coppia in co-omologia:

$$\dots \longrightarrow H^*(X, A_i) \longrightarrow H^*(X) \longrightarrow H^*(A_i) \longrightarrow \dots$$

Siano  $a_i \in \ker(H^*(X) \rightarrow H^*(A_i))$  e siano  $b_i \in H^*(X, A_i)$  tali che  $b_i \mapsto a_i$  (tali  $b_i$  esistono per esattezza). Allora  $a_1 \smile a_2 \smile \dots \smile a_n = 0$ , infatti è immagine di  $b_1 \smile \dots \smile b_n$  che è elemento di  $H^*(X, \bigcup A_i) = H^*(X, X) = 0$ .

**Esempio 7** 1. Il proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è unione di  $n+1$  aperti affini  $U_0, \dots, U_n$  omeomorfi a  $\mathbb{C}^n$ , che è contraibile. Consideriamo allora la successione della coppia  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, U_i)$ :

$$\dots \longrightarrow H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, U_i) \longrightarrow H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\varphi_i} \underbrace{H^{>0}(U_i)}_{H^{>0}(\mathbb{C}^n)=0} \longrightarrow \dots$$

dunque ogni classe  $a \in H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  è in  $\ker(\varphi_i)$  per ogni  $i$ . Allora prese  $n+1$  classi  $a_0, \dots, a_n$  in grado  $> 0$ , possiamo vedere  $a_i \in \ker(\varphi_i)$ , e quindi per l'osservazione precedente si ha  $a_0 \smile \dots \smile a_n = 0$ . Si è dunque provato che il prodotto di  $n+1$  classi qualsiasi in grado  $> 0$  è nullo.

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato osservando che il prodotto di  $n+1$  classi in grado  $> 0$  è una classe in grado  $\geq 2n+2$ , ed essendo  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$  per  $i > 2n$  si ha che tale prodotto è nullo.

2. La sfera  $S^n$  è unione di due aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ , che è contraibile. Allora in modo del tutto analogo a quanto appena visto con  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  si ha che il prodotto di due classi in grado  $> 0$  è nullo.
3. La sospensione  $\Sigma X$  di  $X$  spazio topologico è unione di due coni, che sono contraibili. Allora, come per  $S^n$ , il prodotto di due classi in grado  $> 0$  è nullo.

Vedremo con strumenti che svilupperemo:

**Teorema 7.10**  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ , con  $x$  un generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Inoltre  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$ .

**Teorema 7.11**  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$  con  $x$  generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ . Inoltre  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]$ , con  $x$  generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2)$ .

Una conseguenza del Teorema 7.11 è:

**Teorema 7.12** (Borsuk-Ulam) Non esistono mappe  $S^n \rightarrow S^{n-1}$  continue e dispari.

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la tesi per  $n \geq 3$ , e questo sarà sufficiente, infatti, se esistesse una  $f : S^2 \rightarrow S^1$  dispari, possiamo considerare  $\tilde{f} : \Sigma S^2 = S^3 \rightarrow S^2 = \Sigma S^1$  data da  $(p, t) \mapsto (f(p), -t)$ , e questa sarebbe una mappa dispari  $S^3 \rightarrow S^2$ , assurdo.

Sia dunque  $n \geq 3$ , e supponiamo per assurdo che esista  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  continua e dispari. Poiché  $f$  è dispari, induce al quoziente<sup>4</sup> una  $\bar{f} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , che a sua volta indurrà una mappa a livello di  $\pi_1$ :

$$\bar{f}_\# : \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0)}_{\mathbb{Z}_2} \rightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0)}_{\mathbb{Z}_2}$$

ed entrambi i gruppi sono  $\mathbb{Z}_2$  perché stiamo supponendo  $n \geq 3$ . Affermiamo che  $\bar{f}_\#$  è un isomorfismo: sia  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0)$  un generatore, e sia  $\tilde{\gamma}$  un suo sollevamento su  $S^n$  che abbia estremi  $\tilde{x}_0$  e  $-\tilde{x}_0$ . Il cammino  $\tilde{\gamma}$  viene mappato tramite  $f$  sul cammino  $f(\tilde{\gamma})$ , che ha estremi  $f(\tilde{x}_0)$  e  $-f(\tilde{x}_0)$  (perché  $f$  dispari). Allora  $f(\tilde{\gamma})$  passa al quoziente su  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , e genera  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0)$ , cioè  $\bar{f}_\#$  è isomorfismo.

Possiamo allora passare all'omologia, e otteniamo che la mappa indotta  $\bar{f}_*$  è un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) & \xrightarrow{\bar{f}_\#(\simeq)} & \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \end{array}$$

<sup>4</sup>Qui, come anche più avanti, stiamo sottintendendo che vediamo  $S^n$  come rivestimento universale (di grado 2) di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .

Ma allora, per il Teorema 6.9 (dei Coefficienti Universali in Co-omologia)  $\bar{f}$  induce un isomorfismo in co-omologia (indichiamo con  $x$  e  $y$  i generatori dei rispettivi gruppi):

$$\begin{array}{ccc} \bar{f}^* : H^1(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

Dunque a livello di anelli di co-omologia si ha:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2[x]/(x^n) & \stackrel{T.7.11}{\simeq} & H^\bullet(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \stackrel{T.7.11}{\simeq} & \mathbb{Z}_2[y]/(y^{n+1}) \\ & & x & \mapsto & y & & \\ & & 0 = x^n & \mapsto & y^n \neq 0 & & \end{array}$$

che è assurdo. Non esiste dunque  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  dispari.  $\square$

**Corollario 7.13** Data  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e tale che  $f(-x) = -f(x)$ , esiste  $x_0$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Se  $f$  non avesse zeri allora  $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  sarebbe mappa  $S^n \rightarrow S^{n-1}$  dispari, assurdo.  $\square$

**Corollario 7.14** Data  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, esiste  $x_0$  tale che  $f(x_0) = f(-x_0)$ .

*Dimostrazione.* Se fosse  $f(x) \neq f(-x)$  per ogni  $x \in S^n$  allora  $f(x) - f(-x)$  sarebbe mappa  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dispari e mai nulla.  $\square$



## Chapter 8

# Omologia di Varietà

**Definizione 46** Una  $n$ -varietà topologica è uno spazio di Hausdorff localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Esempi di varietà: aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^n$ , somme connesse di superfici compatte, prodotto di varietà.

**Fatto 8.1** Per  $n \neq 4$ , una  $n$ -varietà  $X$  si può dotare di struttura di CW complesso  $n$ -dimensionale. Per  $n = 4$  non è noto in generale.

**Corollario 8.2** Se  $X$  è  $n$ -varietà allora  $H_i(X) = 0$  per  $i > n$ ; se  $X$  compatta allora  $H_i(X)$  è finitamente generato per ogni  $i$ .

**Definizione 47** Un'orientazione su una  $n$ -varietà  $M$  è una funzione  $\mu$  che ad ogni  $x \in M$  associa una classe (orientazione locale)  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  che genera<sup>1</sup>, soggetta alla seguente condizione di continuità: per ogni  $x \in M$  esistono  $N$  intorno compatto di  $x$  e una classe  $\mu_N \in H_n(M, M \setminus N)$  tale che  $\mu_N$  si restringe a  $\mu_y$  per ogni  $y \in N$ :

$$\begin{aligned} H_n(M, M \setminus N) &\rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\}) \\ \mu_N &\mapsto \mu_y \end{aligned}$$

**Osservazione.** Si potrebbe definire tutto analogamente a coefficienti in un gruppo ciclico  $G$ :  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; G) = G$  un generatore. In particolare, per  $G = \mathbb{Z}_2$  non c'è da fare la scelta di un generatore, e dunque si ottiene che tutte le varietà ammettono orientazione a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ .

In realtà possiamo assumere con più generalità che  $G$  sia un anello e  $\mu_x$  sia un'unità di  $G$ .

**Definizione 48** Una  $n$ -varietà che ammette un'orientazione si dice *orientabile*. Una varietà orientabile munita di un'orientazione si dice varietà *orientata*.

**Osservazione.** Per un'orientazione di una  $n$ -varietà  $M$ , sarebbe auspicabile avere un'unica classe globale  $\mu_M$  che si restringe bene su ogni  $x \in M$ . Questo in generale però non è possibile: ad esempio, se  $M$  non è compatta,  $\mu$  si restringe a 0 fuori dal supporto (un compatto) di un suo rappresentante, dunque non si può avere un'unica classe globale.

Data una  $n$ -varietà  $M$ , un compatto  $K \subseteq M$  e  $x \in K$ , definiamo la mappa di restrizione:

$$\rho_x : H_i(M, M \setminus K) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$$

---

<sup>1</sup>Per escissione si può restringersi ad un intorno aperto di  $x$  omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ .

**Lemma 8.3** Sia  $M$  una  $n$ -varietà,  $G$  un gruppo abeliano. Allora:

1. per ogni compatto  $K \subseteq M$  si ha  $H_i(M, M \setminus K; G) = 0$  per ogni  $i > n$
2. Se  $u \in H_n(M, M \setminus K; G)$  e  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$  allora  $u = 0$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per passi, aumentando la generalità della varietà per la quale si dimostra la tesi ad ogni passo.

- 1)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  convesso: per convessità, per ogni  $x \in K$  si ha che  $\{x\}$  è retratto di deformazione di  $K$ , e detta  $B$  una palla aperta di centro  $x$  e contenente  $K$  abbiamo che  $M \setminus K$  e  $M \setminus x$  si retraggono entrambi per deformazione su  $M \setminus B$  lungo i raggi da  $x$ . Ma allora  $\rho_x : H_i(M, M \setminus K) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$  è isomorfismo. Seguono 1. e 2.
- 2)  $M = \mathbb{R}^n$  e  $K = K_1 \cup K_2$ , con 1. e 2. che valgono per  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_1 \cap K_2$ : usiamo il Fatto 2.12 (Mayer-Vietoris in omologia relativa) e otteniamo ( $i > n$ ):

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(M, M \setminus K_1 \cap K_2) \rightarrow H_i(M, M \setminus K) \xrightarrow{\alpha} H_i(M, M \setminus K_1) \oplus H_i(M, M \setminus K_2) \rightarrow \cdots$$

e per ipotesi il primo e il terzo termine sono nulli. Allora è nullo anche il secondo, cioè vale 1. anche per  $K$ . Per mostrare 2.: consideriamo la successione riportata sopra per  $i = n$  (in particolare il primo termine è ancora nullo e  $\alpha$  è iniettiva):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \rho_x \downarrow & & \swarrow \text{---} & & \\ & & & & H_n(M, M \setminus \{x\}) & & & & \end{array}$$

Sia  $u \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$ . Ma allora, per commutatività, anche  $\alpha(u) = (u_{K_1}, u_{K_2})$  si restringe a zero per ogni  $x \in K$ . Per  $K_1, K_2$  vale 2. per ipotesi, dunque  $(u_{K_1}, u_{K_2}) = (0, 0)$ , e  $\alpha$  è iniettiva, quindi  $u = 0$ , cioè vale 2. per  $K$ .

- 3)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  unione finita di compatti convessi: la tesi segue immediatamente dai punti 1) e 2) per induzione sul numero di compatti convessi che compongono  $K$ , sfruttando che intersezione finita di compatti e convessi è compatta e convessa.
- 4)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto qualsiasi: dato  $u \in H_i(M, M \setminus K)$  esistono  $N$  aperto con  $K \subseteq N$  e un  $u' \in H_i(M, M \setminus N)$  tali che  $u' \mapsto u$ <sup>2</sup>. Per compattezza, esistono  $\{B_1, \dots, B_r\}$  palle chiuse,  $B_j \subseteq N$  e che ricoprono  $K$  (senza perdita di generalità  $B_j \cap K \neq \emptyset$ ). Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo di mappe di restrizione:

$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) & \xrightarrow{l_*} & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j) \\ & \searrow k_* & \downarrow j_* \\ & & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \end{array}$$

Osserviamo che per  $i > n$  per il punto 3) si ha  $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j) \stackrel{*}{=} 0$ , e per commutatività allora

$$u = k_*(u') = j_*((l_*(u')) \stackrel{*}{=} j_*(0) = 0 \implies \text{vale 1.}$$

<sup>2</sup>Classi di omologia sono a supporto compatto, quindi esiste  $(X, A) \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  coppia compatta e  $v \in H_i(X, A)$  tale che  $v \mapsto u$ . Allora basta prendere l'aperto  $N = \mathbb{R}^n \setminus A$ .



Per mostrare 2.: sia ora  $i = n$ , e siano  $u \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  tale che  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$ ,  $u' \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N)$  tale che  $k_*(u') = u$ ,  $u'' = l_*(u') \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j)$ . Per il punto 3) la tesi 2. vale per  $\bigcup_{j=1}^r B_j$ , dunque se mostriamo che  $\rho_y(u'') = 0$  per ogni  $y \in \bigcup_{j=1}^r B_j$  si ha  $u'' = 0$ , e quindi  $u = j_*(u'') = 0$ , cioè vale 2. anche per  $K$  e si è concluso. Mostriamo dunque  $\rho_y(u'') = 0$  per ogni  $y \in \bigcup_{j=1}^r B_j$ : sia  $y \in B_j$ , e sia  $x \in B_j \cap K$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo, dato dalle restrizioni ( $\gamma$  e  $\theta$  isomorfismi perché indotti da equivalenza omotopica):

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_j) & & \\
 \downarrow j_* & \searrow \rho_y & \swarrow \cong \gamma & & \downarrow \cong \theta \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\
 & \searrow \rho_x & & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

Per commutatività si ha  $0 = \rho_x(u) = \rho_x(j_*(u'')) = \theta(\varphi(u'')) \xrightarrow{\theta \text{ iso}} \varphi(u'') = 0$ . Ma allora, ancora per commutatività,  $\rho_y(u'') = \gamma(\varphi(u'')) = 0$ , come voluto. Come detto questo conclude.

- 5)  $M$  qualsiasi,  $K \subseteq U$  aperto,  $U \simeq \mathbb{R}^n$ : per escissione  $H_i(M, M \setminus K) \simeq H_i(U, U \setminus K) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K')$  con  $K'$  immagine di  $K$  tramite l'omeomorfismo  $U \simeq \mathbb{R}^n$ . Dal punto 4) si conclude.
- 6)  $M$  qualsiasi,  $K$  qualsiasi: possiamo decomporre  $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$  con  $K_i \subseteq U_i \simeq \mathbb{R}^n$ . Segue le tesi per induzione, usando i punti 2) e 5).

□

**Teorema 8.4** Sia  $M$  una  $n$ -varietà orientabile con orientazione  $\mu$ , allora per ogni compatto  $K \subseteq M$  esiste un'unica classe  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$  per ogni  $x \in K$ .

*Dimostrazione.* Unicità: siano  $\mu_K, \mu'_K$  che si restringono a  $\mu_x$  per ogni  $x \in K$ . Allora  $\mu_K - \mu'_K$  si restringe a 0 per ogni  $x \in K$ . Per il Lemma 8.3, punto 2., segue  $\mu_K - \mu'_K = 0$ .

Esistenza:

- 1) Se  $K$  è contenuto in un intorno sufficientemente piccolo di qualche punto, l'esistenza della classe  $\mu_K$  segue dalla condizione di continuità dell'orientazione.
- 2) Se  $K = K_1 \cup K_2$ , con esistenza di classi  $\mu_{K_1} \in H_n(M, M \setminus K_1)$  e  $\mu_{K_2} \in H_n(M, M \setminus K_2)$  tali per cui valga la tesi: osserviamo innanzitutto che esiste anche una classe  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  per restrizione di  $\mu_{K_1}$  (o di  $\mu_{K_2}$ , tanto si ha unicità). Usiamo il Fatto 2.12 (Mayer-Vietoris in omologia relativa):

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 \xrightarrow{L.8.3} H_{n+1}(M, M \setminus K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_n(M, M \setminus K) \\
 & & & \swarrow \varphi & \\
 & & H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) & \xrightarrow{\psi} & H_n(M, M \setminus K_1 \cap K_2) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Poiché  $\mu_{K_1}$  e  $\mu_{K_2}$  si restringono entrambe a  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  si ha<sup>3</sup>  $\psi(\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) = 0$ , e quindi per esattezza esiste  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\varphi(\mu_K) = (\mu_{K_1}, \mu_{K_2})$ . Per costruzione allora  $\mu_K$  si restringe bene per ogni  $x \in K$ .

<sup>3</sup>Si ricorda che la mappa  $\psi$  è data da  $\psi(a, b) = i_*(a) - j_*(b)$ , dove  $i_*, j_*$  sono le mappe indotte dalle inclusioni. Nel nostro caso come detto  $i_*(\mu_{K_1}) = \mu_{K_1 \cap K_2} = j_*(\mu_{K_2})$ .

A questo punto basta osservare che un qualsiasi compatto  $K$  si può esprimere come unione finita di compatti  $K_1 \cup \dots \cup K_r$  contenuti in intorni sufficientemente piccoli affinché si abbia esistenza di classi  $\mu_{K_i} \in H_n(M, M \setminus K_i)$  che si restringano bene. Allora si conclude per induzione usando il punto 2).  $\square$

**Definizione 49** Una classe  $\mu_K$  che si restringe bene su ogni punto  $x \in K$  è detta classe fondamentale.

In particolare dunque se  $M$  varietà è compatta allora esiste una classe fondamentale globale. Inoltre:

**Corollario 8.5** Sia  $M$  una  $n$ -varietà. Allora  $H_i(M) = 0$  per  $i > n$ .

*Dimostrazione.* Se  $M$  è compatta allora la tesi segue dal Lemma 8.3 punto 1. con  $K = M$ . Sia dunque ora  $M$  non compatta. Sia  $u \in H_i(M)$  ( $i > n$ ), essa ha supporto in  $K$  compatto. Possiamo prendere  $B_1, \dots, B_r \subseteq \mathbb{R}^n$  palle aperte tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_j$$

dunque esiste  $u' \in H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j)$  tale che  $u' \mapsto u$ . Mostriamo che  $H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j) = 0$ , e questo conclude.

Sia  $B$  un qualsiasi aperto propriamente contenuto in  $\mathbb{R}^n$ . Possiamo vedere  $\mathbb{R}^n \subset S^n$  e dunque  $B$  è il complementare di un compatto non vuoto  $K$  di  $S^n$ . Dunque abbiamo, per  $i \geq n$ :

$$0 = H_{i+1}(S^n, S^n \setminus K) \rightarrow H_i(S^n \setminus K) \rightarrow H_i(S^n) \rightarrow H_i(S^n, S^n \setminus K)$$

dove gli ultimi due termini sono entrambi nulli per  $i > n$ , mentre per  $i = n$  possiamo almeno affermare che  $H_i(S^n) \rightarrow H_i(S^n, S^n \setminus K)$  è iniettiva (diventa un isomorfismo componendo con  $H_n(S^n, S^n \setminus K) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{p\})$  con  $p \in K$ ). Quindi  $H_i(S^n \setminus K) = 0$  per  $i \geq n$ .

Allora per induzione su  $r$  usando Mayer-Vietoris si trova che  $H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j) = 0$  per  $i > n$ .  $\square$

**Teorema 8.6** Sia  $M$  una  $n$ -varietà qualsiasi (anche non orientabile). Per ogni compatto  $K \subseteq M$  esiste un'unica  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}_2)$  tale che  $\mu_K \mapsto \mu_x$  per ogni  $x \in K$ .

*Dimostrazione.* Si fa in modo analogo a quella del Teorema 8.4, usando l'omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Esempi di superfici orientabili:  $S^n$ , aperti di superfici orientabili,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  se e solo se  $n$  dispari,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

## Chapter 9

# Prodotto CAP ( $\frown$ )

Consideriamo  $C^\bullet(X) = \text{Hom}(C_\bullet(X), \mathbb{Z})$ . Abbiamo una naturale mappa di valutazione:

$$\langle , \rangle : C^i(X) \times C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

La vediamo come morfismo di complessi nel seguente modo: pensiamo  $C^\bullet(X)$  come complesso di catene, rinominando il grado:  $\overline{C}_i(X) = C^{-i}(X)$ , e prendiamo come differenziale  $\overline{d}_i : \overline{C}_i \rightarrow \overline{C}_{i-1}$  dato da  $\overline{d}_i = d^i$ .

Se con questa convenzione pensiamo  $C^\bullet(X)$  come complesso di catene, allora  $\langle , \rangle$  induce una mappa di complessi  $\varepsilon : C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \rightarrow Z_\bullet$  dove il complesso in arrivo  $Z_\bullet$  è quello che ha  $\mathbb{Z}$  in grado 0 e il gruppo nullo negli altri gradi. Dunque la mappa è

$$\oplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i(X) \otimes C_{i+n}(X) = (C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X))_n \xrightarrow{\varepsilon_n} Z_n = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} \oplus_i \langle , \rangle & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

**Lemma 9.1**  $\varepsilon$  è un morfismo di complessi.

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  che è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i \otimes C_{i+n} & \xrightarrow{\varepsilon_n} & Z_n \\ d \downarrow & & \downarrow d' \\ \oplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i \otimes C_{i+n-1} & \xrightarrow{\varepsilon_{n-1}} & Z_{n-1} \end{array}$$

Per  $n \neq 1$  le composizioni sono nulle<sup>1</sup>, dunque la commutatività è ovvia.

Mostriamo la commutatività per  $n = 1$ : prendiamo  $f \in C^i(X)$  e  $\alpha \in C_{i+1}(X)$ , per cui  $f \otimes \alpha$  è un elemento di grado 1 di  $C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$ . Per definizione di differenziale di tensore di complessi abbiamo

$$d(f \otimes \alpha) = df \otimes \alpha + (-1)^i f \otimes d\alpha$$

da cui, sfruttando la definizione di differenziale di cocatene, si ricava

$$\varepsilon_0(d(f \otimes \alpha)) = \langle df, \alpha \rangle + (-1)^i \langle f, d\alpha \rangle = (-1)^{i+1} f(d\alpha) + (-1)^i f(d\alpha) = 0$$

cioè si è verificato che  $\varepsilon_0 \circ d = 0 \stackrel{\varepsilon_1=0}{=} d' \circ \varepsilon_1$ . □

Consideriamo ora la seguente composizione:

$$C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \xrightarrow{1 \otimes \tilde{\Delta}} C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} Z_\bullet \otimes C_\bullet(X) \simeq C_\bullet(X)$$

<sup>1</sup>Per  $n \neq 0, 1$  le mappe orizzontali sono nulle. Per  $n = 0$  si ha  $\varepsilon_{n-1} = 0$  e  $d' = 0$ .

dove  $\tilde{\Delta}$  è la mappa data dalla composizione

$$C_*(X) \xrightarrow{\Delta} C_*(X \times X) \xrightarrow{EZ} C_*(X) \otimes C_*(X)$$

Questo è un morfismo di complessi, che in omologia induce

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X) \otimes H_n(X) & \longrightarrow & H_{n-i}(C^*(X) \otimes C_*(X)) & \longrightarrow & H_{n-i}(X) \\ a \otimes b & & \longmapsto & & a \frown b \end{array}$$

**Definizione 50** Quella sopra descritta è detta *prodotto cap*.

**Osservazione.** La mappa  $\frown$  non dipende dalla scelta dell'omomorfismo  $EZ$ , perché come visto tutte le possibili scelte sono omotope e dunque inducono la stessa mappa in omologia.

In particolare dunque possiamo usare l'approssimazione diagonale di Alexander-Whitney

$$\Delta\sigma = \sum_{p+q=n} \sigma_p^1 \otimes \sigma_q^2$$

per ottenere una formula esplicita per  $\frown$ : per  $\varphi \in C^p(X)$  e  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  una  $(p+q)$ -catena singolare:

$$\varphi \frown \sigma = \varphi(\sigma_p^1)\sigma_q^2 = \varphi(\sigma_{|[e_0, \dots, e_p]}) \cdot \sigma_{|[e_p, \dots, e_{q+p}]}$$

## 9.1 Caso Relativo

Nel caso relativo la mappa  $\tilde{\Delta}$  è  $C_*(X, A \cup B) \rightarrow C_*(X, A) \otimes C_*(X, B)$ , dunque la mappa  $\frown$  indotta è

$$H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\frown} H_{n-i}(X, B)$$

Tensorizzando per  $C_*(X, B)$  la successione esatta della coppia  $(X, A)$  si trova la successione esatta

$$0 \longrightarrow C_*(A) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow C_*(X, A) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow 0$$

e possiamo considerarla all'interno del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) \otimes C_*(X, B) & \longrightarrow & C_*(X) \otimes C_*(X, B) & \longrightarrow & C_*(X, A) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow EZ & & \uparrow EZ & & \uparrow EZ \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A \times (X, B)) & \longrightarrow & C_*(X \times (X, B)) & \longrightarrow & C_*((X, A) \times (X, B)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Osservazione.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(X) \otimes C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  induce  $H^i(X) \otimes H_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  per ogni  $i$ .

**Proposizione 9.2** Se  $\alpha \in H^{n-i}(X)$ ,  $\beta \in H^i(X)$  e  $\gamma \in H_n(X)$  allora vale la seguente formula:

$$\langle \alpha, \beta \frown \gamma \rangle = \langle \alpha \smile \beta, \gamma \rangle$$

*Dimostrazione.* Si fa un calcolo diretto, sfruttando le definizioni. Riprendiamo le notazioni usate nella sezione 7.3; siano  $p = |\alpha|$ ,  $q = |\beta|$ :

$$\langle \alpha \smile \beta, \gamma \rangle = (-1)^{pq} \alpha(\gamma_p^1) \beta(\gamma_q^2) = \alpha((-1)^{pq} \beta(\gamma_q^2) \gamma_p^1) = \alpha(\beta \frown \gamma) = \langle \alpha, \beta \frown \gamma \rangle$$

□

## Chapter 10

# Co-omologia a Supporto Compatto

Ricordiamo che data una coppia di spazi  $(X, A)$ , dalla successione della coppia si ha

$$C^n(X, A; G) = \ker (C^n(X; G) \rightarrow C^n(A; G))$$

**Definizione 51** Diciamo che  $u \in C^\bullet(X; G)$  è a supporto compatto se esiste  $K \subseteq X$  compatto tale che  $u \in \ker (C^n(X; G) \rightarrow C^n(X \setminus K; G))$ , cioè se  $u \in C^n(X, X \setminus K; G)$ .

**Osservazione.** Se  $X$  è compatto la definizione è banale.

**Definizione 52** Indichiamo con  $C_C^n(X; G)$  l'insieme delle  $n$ -cocatene a supporto compatto.

**Osservazione.**  $C_C^\bullet(X; G)$  è un complesso di cocatene, infatti se  $u \in C_C^n(X; G)$ , cioè esiste  $K \subseteq X$  compatto tale che  $u \in \ker (C^n(X; G) \rightarrow C^n(X \setminus K; G))$ , per commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} C^n(X; G) & \longrightarrow & C^n(X \setminus K; G) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ C^{n+1}(X; G) & \longrightarrow & C^{n+1}(X \setminus K; G) \end{array}$$

si ha  $\delta u \in \ker (C^{n+1}(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X \setminus K; G)) = C_C^{n+1}(X; G)$ .

**Definizione 53**  $H_C^\bullet(X; G) = H^\bullet(C_C^\bullet(X; G))$  è la co-omologia delle cocatene a supporto compatto.

**Osservazione.** Se  $X$  è compatto, allora co-omologia e co-omologia a supporto compatto coincidono.

La co-omologia a supporto compatto è un invariante topologico, ma non è invariante omotopico. Diamo allora una definizione alternativa. Ci occorrerà fare un po' di lavoro preliminare.

**Definizione 54**  $(\Lambda, \leq)$  poset è un insieme diretto se  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$  esiste  $\gamma \in \Lambda$  tale che  $\alpha \leq \gamma$  e  $\beta \leq \gamma$ .

**Definizione 55** Un sistema diretto di gruppi abeliani indicizzato su  $(\Lambda, \leq)$  insieme diretto è il dato di  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  gruppi abeliani e  $\{\varphi_{\alpha\beta} : A_\alpha \rightarrow A_\beta\}_{\alpha \leq \beta}$  morfismi tali che se  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  allora  $\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$  e per ogni  $\alpha \in \Lambda$  si ha  $\varphi_{\alpha\alpha} = Id_{A_\alpha}$ .

**Definizione 56** Il limite diretto (o colimite) del sistema diretto di gruppi abeliani  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  è

$$\lim_{\longrightarrow} A_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha / \langle a_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha) \rangle_{\alpha \leq \beta}$$

**Osservazione.** Ogni elemento in  $\varinjlim A_\alpha$  ha un rappresentante in  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$  che vive in un unico termine. Infatti, dato un  $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i} \in \varinjlim A_\alpha$ , è sufficiente prendere  $\gamma \in \Lambda$  tale che  $\alpha_i \leq \gamma$  per ogni  $i$ , e si ha  $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i \gamma}(a_{\alpha_i})$  e  $\varphi_{\alpha_i \gamma}(a_{\alpha_i}) \in A_\gamma$  per ogni  $i$ .

**Lemma 10.1** Siano  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  sistemi diretti indicizzati su  $\Lambda$ . Se per ogni  $\alpha \in \Lambda$  è esatta la successione

$$0 \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$$

e per ogni  $\beta \in \Lambda$  con  $\alpha \leq \beta$  è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\alpha & \longrightarrow & B_\alpha & \longrightarrow & C_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi_{\alpha\beta}^A \downarrow & & \varphi_{\alpha\beta}^B \downarrow & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^C & & \\ 0 & \longrightarrow & A_\beta & \longrightarrow & B_\beta & \longrightarrow & C_\beta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

allora è esatta anche la successione

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_\alpha \longrightarrow \varinjlim B_\alpha \longrightarrow \varinjlim C_\alpha \longrightarrow 0$$

**Corollario 10.2** Il limite diretto di successioni esatte lunghe è esatto

*Dimostrazione.* Data una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow A_{n-1,\alpha} \xrightarrow{t_{n-1,\alpha}} A_{n,\alpha} \xrightarrow{t_{n,\alpha}} A_{n+1,\alpha} \longrightarrow \dots$$

possiamo ricondurci alla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \underbrace{\ker(t_{n,\alpha})}_{=\text{Im}(t_{n-1,\alpha})} \hookrightarrow A_{n,\alpha} \xrightarrow{t_{n,\alpha}} \underbrace{\text{Im}(t_{n,\alpha})}_{=\ker(t_{n+1,\alpha})} \longrightarrow 0$$

e a questo punto è sufficiente usare il Lemma 10.1 per avere la tesi passando al limite.  $\square$

Consideriamo ora  $\Lambda = \{K \subseteq X : K \text{ compatto}\}$  dotato della relazione d'ordine parziale di inclusione. Allora  $(\Lambda, \leq)$  è un insieme diretto (unione finita di compatti è compatto).

Osserviamo inoltre che  $\{C^i(X, X \setminus K; G)\}_{K \in \Lambda}$  è un sistema diretto di gruppi abeliani indicizzato su  $\Lambda$ , infatti se  $K \subseteq L$  allora si ha la mappa suriettiva  $C^i(X \setminus K) \rightarrow C^i(X \setminus L)$  (mappa duale dell'inclusione iniettiva  $C_i(X \setminus L) \rightarrow C_i(X \setminus K)$ ), e quindi l'omomorfismo indotto

$$\varphi_{KL} : C^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow C^i(X, X \setminus L; G)$$

è iniettivo. Ma allora, visto che queste mappe sono iniettive, si ha

$$C_C^i(X; G) = \bigcup_{K \text{ cpt}} C^i(X, X \setminus K; G) = \varinjlim C^i(X, X \setminus K)$$

e la costruzione è compatibile con i differenziali.

**Proposizione 10.3** La co-omologia commuta con il limite diretto.

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Im}(d_K^{i-1}) \longrightarrow \ker(d_K^i) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K; G) \longrightarrow 0$$

dove  $d_K^i$  è la mappa di bordo del complesso  $C^\bullet(X, X \setminus K; G)$ . Dal Lemma 10.1 segue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim \text{Im}(d_K^{i-1}) & \longrightarrow & \varinjlim \ker(d_K^i) & \longrightarrow & \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}(d_{\lim}^{i-1}) & \longrightarrow & \ker(d_{\lim}^i) & \longrightarrow & H^i(\varinjlim C_C^i(X; G)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

da cui la tesi. □

**Osservazione.** In particolare si ha  $H_C^i(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$ .

**Teorema 10.4** (Mayer-Vietoris a supporto compatto) Sia  $X = U \cup V$  con  $U, V$  aperti. Allora abbiamo la successione esatta

$$\dots \longrightarrow H_C^i(U \cap V) \longrightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \longrightarrow H_C^i(X) \longrightarrow H_C^{i+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* Per  $K$  e  $L$  compatti,  $K \subseteq U$  e  $L \subseteq V$ , si ha la successione esatta lunga (vedi Sezione 6.4, Mayer-Vietoris a coefficienti in  $G$ )

$$\longrightarrow H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \longrightarrow$$

Fissiamo  $K$  e facciamo il limite diretto su  $L \subseteq V$  compatto. Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

Adesso facciamo il limite diretto su  $K \subseteq U$  compatto. Di nuovo otteniamo una successione esatta lunga

$$\varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

che possiamo riscrivere, sfruttando l'isomorfismo di escissione, nel seguente modo:

$$\varinjlim_{K,L} H^i(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(U, U \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(V, V \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

Osserviamo ora che al variare di  $K \subseteq U$  e  $L \subseteq V$  compatti,  $K \cap L$  descrive tutti i compatti di  $U \cap V$ , per cui si ha  $\varinjlim_{K,L} H^i(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) = H_C^i(U \cap V)$ , e analogamente per gli

altri termini. Dunque la successione si riscrive

$$\dots \longrightarrow H_C^i(U \cap V) \longrightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \longrightarrow H_C^i(X) \longrightarrow \dots$$

che è la successione esatta cercata. □

## 10.1 Teorema della Dualità di Poincaré

Torniamo sulla questione dell'orientazione di varietà.

**Osservazione.** Se  $M$  è  $n$ -varietà orientata, per ogni  $K \subseteq M$  compatto esiste (per il Teorema 8.4) una classe fondamentale  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$ . Inoltre, se  $K \subseteq L$  allora  $\mu_L$  si restringe a  $\mu_K$ .

**Osservazione.** Il prodotto cap, insieme alla classe fondamentale  $\mu_K$ , inducono l'omomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \rho_K : H^i(M, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-i}(M) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \frown \mu_K \end{array}$$

che si comporta bene con le inclusioni, infatti per l'osservazione precedente per  $K \subseteq L$  si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^i(M, M \setminus K) & & \\ \downarrow & \searrow \rho_K & \\ H^i(M, M \setminus L) & \xrightarrow{\rho_L} & H_{n-i}(M) \end{array}$$

Dunque se prendiamo il limite diretto sui compatti di  $X$  otteniamo un omomorfismo

$$\rho_M : H_C^i(M) \rightarrow H_{n-i}(M)$$

che su ogni termine del limite sui compatti agisce facendo il prodotto cap con l'opportuna classe fondamentale. Moralmnte è come fare il prodotto cap con una classe fondamentale globale (che non esiste!).

**Teorema 10.5** (Dualità di Poincaré) Sia  $M$   $n$ -varietà orientata. Allora l'omomorfismo

$$\rho_M : H_C^i(M; G) \rightarrow H_{n-i}(M; G)$$

è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per passi:

- 1)  $M = \mathbb{R}^n$ : supponiamo inoltre per questo caso  $G = \mathbb{Z}$ . Sia  $B_m := \overline{B}(0, m)$  per  $m \in \mathbb{N}$ . Osserviamo che  $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  è cofinale nell'insieme dei compatti<sup>1</sup> di  $\mathbb{R}^n$ , per cui si ha

$$H_C^i(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{K \text{ cpt}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) = \lim_m H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$$

Osserviamo inoltre che le coppie  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$  e  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{m+1})$  sono omotopicamente equivalenti, dunque l'omomorfismo  $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{m+1})$  è un isomorfismo, cioè ogni termine della successione  $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$  è costante, e quindi passando al limite si ha

$$H_C^i(\mathbb{R}^n) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m) \stackrel{\text{coeff. univ.}}{\simeq} \text{Hom}(H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

e questo dimostra  $H_C^i(\mathbb{R}^n) \simeq H_{n-i}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $i$ , e resta solo da mostrare che l'isomorfismo sia proprio  $\rho_M$ . Poiché per  $i \neq n$  i gruppi sono banali, basta dimostrarlo solo per  $i = n$ :

$$\rho_M : H_C^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n)$$

<sup>1</sup>Cioè per ogni  $K$  compatto esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $K \subseteq B_m$



e dato che i termini della successione sono costanti, basta verificare che è isomorfismo la mappa

$$\smile \mu_B : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n)$$

dove  $B$  è una generica palla chiusa centrata nell'origine e  $\mu_B$  è generatore di  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) = \mathbb{Z}$ . Per il Teorema 6.9 (dei Coefficienti Universali in Co-omologia) abbiamo

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \simeq Hom(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z})$$

e dunque possiamo considerare  $\mu_B^* \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$  classe "duale" di  $\mu_B$ , cioè tale che  $\langle \mu_B^*, \mu_B \rangle = 1$ . Sia inoltre  $\alpha = Id$  generatore di  $H^0(\mathbb{R}^n) = Hom(H_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Per la Proposizione 9.2 si ha

$$\alpha(\rho_M(\mu_B^*)) = \alpha(\mu_B^* \smile \mu_B) = \langle \alpha, \mu_B^* \smile \mu_B \rangle \stackrel{P.9.2}{=} \langle \alpha \smile \mu_B^*, \mu_B \rangle = \langle \mu_B^*, \mu_B \rangle = 1 \quad \text{generatore}$$

e  $\alpha$  è un isomorfismo, allora anche  $\rho_M(\mu_B^*)$  è generatore, dunque  $\rho_M$  isomorfismo come voluto.

- 2)  $M = U \cup V$  con  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti tali per cui valga la tesi per  $U, V$  e  $U \cap V$ : consideriamo le successioni di Mayer-Vietoris in omologia e in co-omologia a supporto compatto. Otteniamo il seguente diagramma commutativo<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_C^{i-1}(M) & \longrightarrow & H_C^i(U \cap V) & \longrightarrow & H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) & \longrightarrow & H_C^i(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & \rho_M \downarrow & & \rho_{U \cap V} \downarrow & & \rho_U \oplus \rho_V \downarrow & & \rho_M \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-i+1}(M) & \longrightarrow & H_{n-i}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-i}(U) \oplus H_{n-i}(V) & \longrightarrow & H_{n-i}(M) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

In particolare, poiché  $\rho_{U \cap V}, \rho_U, \rho_V$  sono isomorfismi, anche  $\rho_M$  lo è.

- 3)  $M$  unione crescente di aperti  $U_j$  tali per cui valga la tesi su ogni  $U_j$ : abbiamo i sistemi diretti

$$\begin{array}{ccccccc} H_C^i(U_1) & \longrightarrow & H_C^i(U_2) & \longrightarrow & \dots \\ \rho_{U_1} \downarrow & & \downarrow \rho_{U_2} & & \\ H_{n-i}(U_1) & \longrightarrow & H_{n-i}(U_2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ed il diagramma è commutativo (non è ovvio che lo sia, tralasciamo però la verifica). Inoltre per argomenti di compattezza (ogni compatto è contenuto in qualche  $U_j$ ) si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_j H_{n-i}(U_j) = H_{n-i}(M) \quad \lim_j H_C^i(U_j) = H_C^i(M)$$

Quindi per commutatività del diagramma sopra e poiché tutti i  $\rho_{U_j}$  sono isomorfismi si trova che  $\rho_M$  è isomorfismo.

- 4)  $M$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ : se  $M$  è convessa allora è omeomorfa ad  $\mathbb{R}^n$ , quindi si usa il punto 1). Altrimenti,  $M$  si può scrivere come unione numerabile di palle aperte  $B_i$ . Basta allora considerare  $U_j = \bigcup_{i=1}^j B_i$  e usare il punto 3) (la tesi vale sugli  $U_j$  usando i punti 1) e 2) e procedendo per induzione).

<sup>2</sup>Il quadrato centrale e il quadrato di destra commutano perché le mappe sono quelle date dalle inclusioni. Si verifica che anche il quadrato di sinistra commuta (la verifica è presente sull'Hatcher per chi fosse interessato).

5)  $M$  varietà qualsiasi: consideriamo l'insieme degli aperti di  $M$  per i quali valga la tesi<sup>3</sup>. Per il Lemma di Zorn (il punto 3) ci assicura che valgono le ipotesi) esiste  $V$  elemento massimale. Se  $V = M$  allora abbiamo concluso, se invece  $V \neq M$  consideriamo  $B \subseteq M$  con  $B \simeq \mathbb{R}^n$  e  $B \not\subseteq V$ . Ma allora la tesi vale per  $V$ ,  $B$  e per il punto 4) vale anche per  $B \cap V$ , quindi per il punto 2) vale anche per  $V \cup B$ , assurdo (per massimalità di  $V$ ).

□

**Teorema 10.6** (Dualità di Poincaré modulo 2) Sia  $M$   $n$ -varietà qualsiasi. L'orientazione<sup>4</sup> modulo 2 permette di definire la mappa

$$\rho_2 : H_C^i(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-i}(M; \mathbb{Z}_2)$$

che è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è identica a quella del Teorema precedente, facendo tutto modulo 2. □

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} H_C^i(M) \otimes H^{n-i}(M) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha \otimes \beta) &\mapsto \langle \beta, \rho_M(\alpha) \rangle \end{aligned}$$

e se  $M$  è compatta allora esiste una classe fondamentale  $\mu_M$  che dà un'orientazione globale. Ma allora in tal caso abbiamo

$$\langle \beta, \rho_M(\alpha) \rangle = \begin{cases} \beta(\alpha \frown \mu_M) \\ \langle \beta, \alpha \frown \mu_M \rangle = \langle \beta \smile \alpha, \mu_M \rangle = (\beta \smile \alpha)(\mu_M) \end{cases}$$

**Definizione 57** Dati  $A, B$   $R$ -moduli, un omomorfismo  $A \otimes B \rightarrow R$  è una dualità se induce isomorfismi

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \text{Hom}_R(B, R) \\ B &\rightarrow \text{Hom}_R(A, R) \end{aligned}$$

**Proposizione 10.7** Sia  $M$  varietà compatta, orientata (a meno di passare a  $R = \mathbb{Z}_2$ ) e connessa. Allora il prodotto cup

$$\begin{aligned} H^i(M; R) \otimes H^{n-i}(M; R) &\rightarrow R \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \langle \alpha \smile \beta, \mu_M \rangle \end{aligned}$$

è una dualità per  $R$  campo oppure per  $R = \mathbb{Z}$  modulo la torsione di  $H^\bullet(M; \mathbb{Z})$ .

*Dimostrazione.* L'omomorfismo  $H^{n-i}(M; R) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_{n-i}(M; R), R)$  del Teorema 6.9 (Coefficienti Universali in Co-omologia) è isomorfismo per  $R$  campo o per  $R = \mathbb{Z}$  a meno della torsione di  $H^\bullet(M; \mathbb{Z})$ . Consideriamo ora la mappa  $D$  indotta al duale da  $\rho_M : H_C^i(M; R) \rightarrow H_{n-i}(M; R)$ , cioè la mappa

$$\text{Hom}(H_{n-i}(M; R), R) \xrightarrow{D} \text{Hom}(H_C^i(M; R), R) \stackrel{M \text{ cpt}}{=} \text{Hom}(H^i(M; R), R)$$

Questa è un isomorfismo, in quanto è indotta da  $\rho_M$  che lo è. Allora è isomorfismo anche la composizione

$$H^{n-i}(M; R) \xrightarrow{D \circ h} \text{Hom}(H^i(M; R), R)$$

che è data da  $Dh(\psi)(\varphi) = \psi(\varphi \frown \mu_B) = (\varphi \smile \psi)\mu_B$ .

Inoltre per la commutatività a meno del segno di  $\smile$  si ha che anche la mappa

$$H^i(M; R) \xrightarrow{G} \text{Hom}(H^{n-i}(M; R), R)$$

data da  $G(\varphi)(\psi) = \psi(\varphi \frown \mu_M) = (\varphi \smile \psi)(\mu_M)$  è isomorfismo. □

<sup>3</sup>L'insieme è non vuoto perché per il punto 1) almeno tutti gli aperti di  $M$  omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$  ne fanno parte

<sup>4</sup>Unica perché siamo a coefficienti su  $\mathbb{Z}_2$ .

10.1.1 Anello di Co-omologia di  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  e  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 

**Teorema 10.8**  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$  con  $x$  generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$

*Dimostrazione.* Sia  $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  un generatore; mostriamo per induzione su  $n$  che per ogni  $i \leq n$  l'elemento  $x^i = x \smile \cdots \smile x$  genera  $H^{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  (e questo conclude):

*Passo Base*  $n = 1$ : tutto ovvio (i gruppi successivi a  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$  sono nulli).

*Passo Induttivo:*  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è complesso CW ottenuto incollando una  $2i$ -cella per  $i = 0, \dots, n$ . In particolare  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cup (2n+2)$ -cella. Consideriamo l'inclusione  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \xrightarrow{i} \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ . La mappa indotta

$$i^* : H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$$

è isomorfismo per  $i \leq 2n$ , dato che  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \stackrel{\text{coeff. univ.}}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2n+2 \\ 0 & i \neq 2n+2 \end{cases}$  e quindi dalla successione della coppia si ha ( $i \leq 2n$ ):

$$0 = H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$$

cioè come voluto  $i^*$  è isomorfismo.

Dunque abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) & \xrightarrow{i^*} & H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ x & \mapsto & i^*(x) \\ x^k & \mapsto & i^*(x^k) = (i^*(x))^k \end{array}$$

e per ipotesi induttiva  $(i^*(x))^k$  genera  $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  per  $k \leq n$ , dunque  $x^k$  genera  $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$  per  $k \leq n$ . Per la Proposizione 10.7 il prodotto cup è una dualità

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \otimes H^{2n+2-i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) & \rightarrow & H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) = \mathbb{Z} \\ (\alpha \otimes \beta) & \mapsto & \alpha \smile \beta \end{array}$$

In particolare, per  $i = 2$  troviamo che  $(x \otimes x^n) \mapsto x \smile x^n = x^{n+1}$  genera  $H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$ .  $\square$

**Corollario 10.9**  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$  con  $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$  generatore.

Allo stesso modo si dimostra:

**Teorema 10.10**  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$  con  $x \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  generatore.

Inoltre  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]$ , con  $x \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2)$  generatore.



## Chapter 11

# Gruppi di Omotopia

Consideriamo in questa sezione la categoria  $Top^0$  degli spazi puntati, in particolare ci restringiamo agli spazi Hausdorff.

In generale, a meno che venga detto diversamente,  $I$  indica l'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definizione 58**  $[(X, x_0), (Y, y_0)] = \{\text{classi di omotopia di mappe (puntate)}\}$ .

**Osservazione.** Più in generale, dati  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$ ,  $[(X, A), (Y, B)]$  è l'insieme delle classi di omotopia di mappe  $f : X \rightarrow Y$  tali che  $f(A) \subseteq B$ , dove le omotopie mandano  $A$  in  $B$  ad ogni tempo.

**Definizione 59**  $SX$  è la sospensione ridotta di  $X$ , cioè  $SX = X \times I / (X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$ .

**Osservazione.** Sotto alcune ipotesi su  $X$  (ad esempio  $X$  complesso CW) si ha che la sospensione  $\Sigma X^1$  e la sospensione ridotta  $SX$  sono omotopicamente equivalenti.

Sia  $*$   $\in S^n$  un punto base. Allora

**Definizione 60**  $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)] =: [S^n, X]^0$  è l' $n$ -esimo gruppo di omotopia di  $X$ .

**Osservazione.**  $\pi_0(X, x_0)$  è l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ ;  $\pi_1(X, x_0)$  è il gruppo fondamentale.

Vogliamo dotare  $\pi_n(X, x_0)$  di una struttura di gruppo anche per  $n \geq 2$ .

**Definizione 61** Il “prodotto smash” di  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  è  $X \wedge Y = X \times Y / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$ .

**Osservazione.** Date due mappe puntate  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$ , queste inducono una mappa  $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$  (data da  $[x, y] \mapsto [f(x), g(y)]$ ).

Preso il cubo unitario  $I^n$ , consideriamo lo spazio  $I^n / \partial I^n$  con punto base  $[\partial I^n]$ .

**Lemma 11.1**  $I^n / \partial I^n \simeq S^n$ .

*Dimostrazione.* Per  $n = 1$   $I^1 / \partial I^1 \simeq S^1$ . Per  $n = 2$ :  $I^2 / \partial I^2 = I / \partial I \wedge I / \partial I = S^1 \wedge S^1$  e vedendo  $S^1$  come compattificazione di  $\mathbb{R}$  si ha  $S^1 \wedge S^1 = (\mathbb{R} \cup \infty) \wedge (\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R}^2 \cup \infty \simeq S^2$ .

Il caso generale si fa allo stesso modo:  $I^n / \partial I^n = (I / \partial I)^{\wedge n} = (S^1)^{\wedge n} \simeq S^n$ .  $\square$

**Corollario 11.2**  $\pi_n(X, x_0) = [(I^n / \partial I^n, [\partial I^n]), (X, x_0)] \simeq [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$ .

---

<sup>1</sup> $\Sigma X = X \times I / (x, 0) \sim (y, 0), (x, 1) \sim (y, 1)$ .

Possiamo ora definire un'operazione su  $\pi_n(X, x_0)$ : per  $[f], [g] \in [(I^n/\partial I^n, [\partial I^n]), (X, x_0)]$  poniamo

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Osservazione.** L'operazione è ben definita:  $f, g$  sono costanti  $x_0$  su  $\partial I^n$ , quindi si incollano bene.

**Proposizione 11.3** Con questa operazione  $\pi_n(X, x_0)$  è un gruppo per  $n \geq 1$ , commutativo per  $n \geq 2$ .

*Dimostrazione. Inverso:* data  $[f]$ , la sua inversa è rappresentata dalla mappa

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$$

*Associatività:* per avere un'omotopia tra  $((f + g) + h)$  e  $(f + (g + h))$  è sufficiente riscalarla la prima coordinata.

*Commutatività:* vediamola graficamente

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{f} & \boxed{g} \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|} \hline \boxed{f} \\ \hline \boxed{g} \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{g} & \boxed{f} \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

□

**Osservazione.** Ragionando allo stesso modo si trova che  $[(S^n \wedge X, *), (Y, y_0)]$  è un gruppo per  $n \geq 1$ , abeliano per  $n \geq 2$ .

Notazione:  $Hom(X, Y)$  è l'insieme delle mappe continue  $X \rightarrow Y$ ,  $Hom(X, Y)^0$  è l'insieme delle mappe continue e puntate  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

**Fatto 11.4** Dati  $X, Y, Z$  spazi puntati con  $Y$  localmente compatto, esiste una bigezione

$$Hom(X \wedge Y, Z)^0 \leftrightarrow Hom(X, Hom(Y, Z)^0)^0$$

che è anche un isomorfismo.

**Definizione 62** Per  $(X, x_0)$  spazio puntato, lo spazio dei loop è  $\Omega X := Hom(S^1, X)^0$ . Lo consideriamo come spazio puntato, con punto base dato dalla mappa costante  $S^1 \rightarrow x_0$ .

Consideriamo ora i funtori  $X \mapsto SX = S^1 \wedge X$  e  $X \mapsto \Omega X$  su  $Top^0$ .

**Corollario 11.5** C'è un isomorfismo  $[SX, Y]^0 \simeq [X, \Omega Y]^0$ , detto *isomorfismo aggiunto*.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Fatto 11.4. □

**Corollario 11.6**  $\pi_{n+1}(X, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, x_0)$  <sup>2</sup>.

*Dimostrazione.*  $\pi_{n+1}(X, x_0) = [S^{n+1}, X] = [S(S^n), X] \stackrel{C.11.5}{=} [S^n, \Omega X] = \pi_n(\Omega X, x_0)$ . □

Anche su  $\Omega X$  possiamo definire un prodotto: date  $f : I/\partial I \rightarrow X$  e  $g : I/\partial I \rightarrow X$ , poniamo

$$f * g : I/\partial I \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} f(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Attenzione si sta facendo un abuso di notazione: nello spazio  $(\Omega X, x_0)$  stiamo indicando con  $x_0$  la mappa costante.

**Fatto 11.7** Sia  $m : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  la mappa  $(f, g) \mapsto f * g$ . Allora:

1.  $m$  è continua
2. le mappe  $f \mapsto f * x_0$ ,  $f \mapsto x_0 * f$  sono omotope (come mappe puntate) all'identità
3.  $m(Id \times m)$  e  $m(m \times Id)$  sono omotope (come mappe puntate) come mappe  $\Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$
4.  $f \mapsto f * f^-$  e  $f \mapsto f^- * f$  sono omotope (come mappe puntate) alla mappa costante<sup>3</sup>.

**Corollario 11.8**  $[X, \Omega Y]^0$  è un gruppo.

**Osservazione.** Dipendenza dal Punto Base e Azione di  $\pi_1$ :

Sia  $X$  connesso per archi (dunque  $\pi_0(X) = \{1\}$ ),  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\Omega_{x_0} X$ ,  $\Omega_{x_1} X$  spazi di loop con punto base  $x_0$  e  $x_1$  rispettivamente. Sia inoltre  $\gamma : I \rightarrow X$  cammino con  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ . Consideriamo la trasformazione

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{x_1} X & \rightarrow & \Omega_{x_0} X \\ f & \mapsto & \gamma * f * \gamma^- \end{array}$$

questa induce sui gruppi di omotopia

$$\pi_{i+1}(X, x_1) \simeq \pi_i(\Omega_{x_1} X, x_1) \longrightarrow \pi_i(\Omega_{x_0} X, x_0) \simeq \pi_{i+1}(X, x_0)$$

con gli isomorfismi a destra e a sinistra che sono naturali. La mappa indotta

$$\pi_{i+1}(X, x_1) \xrightarrow{\gamma_*} \pi_{i+1}(X, x_0)$$

è una bigezione, e più precisamente è un isomorfismo (con inversa  $(\gamma^-)_*$ ). Dunque per  $x_1 = x_0$  è definita un'azione di  $\pi_1(X, x_0)$  su  $\pi_i(X, x_0)$  per ogni  $i \geq 1$ .

**Fatto 11.9** Se l'azione di  $\pi_1(X, x_0)$  è banale su  $\pi_n(X, x_0)$  allora  $\pi_n(X, x_0)$  non dipende dal punto base, nel senso che l'isomorfismo tra i gruppi al variare del punto base è naturale. Altrimenti l'isomorfismo dipenderà dal cammino  $\gamma$  che si sceglie.

## 11.1 Fibrazioni

Notazione: dato uno spazio  $X$ , ci capiterà di includerlo in  $X \times I$  ad un qualche tempo. Chiamiamo  $i_t^X$  l'inclusione al tempo  $t$ .

**Definizione 63** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice *fibrazione di Hurewicz* se ha la proprietà di sollevamento di omotopia (HLP<sup>4</sup>) per qualsiasi spazio  $(X, x_0)$ , cioè: per ogni  $h : X \times I \rightarrow B$ , per ogni  $a : X \rightarrow E$  tale che  $p \circ a(x) = h(x, 0)$  esiste  $H : X \times I \rightarrow E$  tale che  $p \circ H = h$  e  $H(x, 0) = a(x)$ . Cioè esiste  $H$  che commuta con il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & E \\ i_0^X \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

$H$  si dice sollevamento di  $h$  con dato iniziale  $a$ . Inoltre  $p^{-1}(x_0) = F$  è la fibra di  $p$ <sup>5</sup>.

<sup>3</sup>  $f^-$  è la mappa  $t \mapsto f(1-t)$ .

<sup>4</sup> L'abbreviazione sta per *Homotopy Lifting Property*.

<sup>5</sup> Diciamo "la" fibra di  $p$ , ma ovviamente dipende dal punto base  $x_0 \in B$  fissato.

**Definizione 64** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice *fibrazione di Serre* se ha la HLP per  $X = I^n$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione.** Rivestimenti sono fibrazioni di Hurewicz, e fibrazioni di Hurewicz sono fibrazioni di Serre.

**Fatto 11.10** 1. Se  $p : E \rightarrow B$  è fibrazione di Hurewicz e  $B$  è connesso per archi, allora fibre di punti base distinti sono omotopicamente equivalenti.

2. Se  $p : E \rightarrow B$  è fibrazione di Serre e  $B$  è connesso per archi, allora per ogni  $x, y \in B$  vale che  $\pi_n(p^{-1}(x)) \simeq \pi_n(p^{-1}(y))$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

## 11.2 Gruppi di Omotopia Relativa

Notazione: per  $n \geq 1$  sia  $J^n = \partial I^n \times I \cup I^n \times \{0\} \subseteq \partial I^{n+1}$ , cioè  $J^n = \partial I^{n+1} \setminus (I^n \overset{\circ}{\times} \{1\})$  è  $\partial I^{n+1}$  meno la parte interna della faccia superiore. Poniamo inoltre  $J^0 = \{0\} \subseteq \partial I$ .

**Definizione 65** Il gruppo di omotopia di  $(X, x_0)$  relativo a  $A \subseteq X$  è

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) = [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)]$$

cioè è l'insieme delle classi di omotopia di mappe  $I^{n+1} \rightarrow X$  tali che  $\partial I^{n+1} \mapsto A$ ,  $J^n \mapsto x_0$ .

Come per i gruppi di omotopia normali, per  $n = 0$  non si ha un gruppo, mentre per  $n \geq 1$  lo è con l'operazione che concatena le mappe

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ben definita perché  $f, g$  sono costanti  $x_0$  su  $J^n$ . Come nel caso normale:

**Proposizione 11.11** Per  $n \geq 2$  il gruppo  $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$  è commutativo.

**Osservazione.** Attenzione al fatto che nella definizione si sta usando  $\pi_{n+1}$ , dunque il gruppo è abeliano da  $\pi_3$  in poi.

**Osservazione.** Per  $A = \{x_0\}$  si ottengono i gruppi di omotopia normali.

**Osservazione.**  $\pi_n$  è un funtore: una  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  induce un omomorfismo di gruppi  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  per  $n \geq 2$  (o per  $n \geq 1$  nel caso  $A = \{x_0\}$ ).

**Lemma 11.12** Esiste un isomorfismo canonico (detto *isomorfismo aggiunto relativo*)

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0)$$

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $[(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)]$  con  $[(I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n, *), (X, A, x_0)]$ . Poiché  $J^n$  è contraibile, i quozienti sono  $I^{n+1}/J^n \simeq D^{n+1}$ ,  $\partial I^{n+1}/J^n \simeq S^n$ , entrambi con punto base  $(1, 0, \dots, 0)$ . Inoltre si ha

$$S(D^{n+1}) = S(I^{n+1}/J^n) = I^{n+1}/J^n \wedge I/\partial I = I^{n+2}/(J^n \times I \cup I^{n+1} \times \partial I) = I^{n+2}/J^{n+1} = D^{n+2}$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0) &= [(D^n, S^{n-1}, *), (\Omega X, \Omega A, x_0)] \simeq [(S(D^n), S(S^{n-1}), *), (X, A, x_0)] = \\ &= [(D^{n+1}, S^n, *), (X, A, x_0)] = \pi_{n+1}(X, A, x_0) \end{aligned}$$

□



**Osservazione.** Una classe  $[f] \in \pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$  soddisfa le condizioni per essere un elemento di  $\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$ , possiamo dunque definire un omomorfismo

$$j_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

Data una mappa  $h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ , la sua restrizione alla faccia  $I^n \times \{1\}$  (quella la cui parte interna è quello che manca a  $J^n$  per essere  $\partial I^{n+1}$ ) induce una mappa

$$\partial h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$$

Abbiamo dunque un operatore

$$\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, x_0)$$

che è un omomorfismo per  $n \geq 1$  <sup>6</sup>.

Infine, una classe  $[f] \in \pi_n(A, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (A, x_0)]$  soddisfa le condizioni per essere un elemento di  $\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$ , possiamo dunque definire un omomorfismo (indotto dall'inclusione)

$$i_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

Possiamo allora definire una successione di coppia  $(X, A)$ :

**Proposizione 11.13** La seguente successione lunga (di gruppi fino a prima dei termini  $\pi_1$ ) è esatta:

$$\dots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

*Dimostrazione.* Grazie al Corollario 11.6 e al Lemma 11.12, basta dimostrare l'esattezza della successione solo per gli ultimi 3 termini, poi usiamo la successione della coppia  $(\Omega^n X, \Omega^n A)$ , i cui ultimi 3 termini danno l'esattezza della successione della coppia  $(X, A)$  in grado  $n$ .

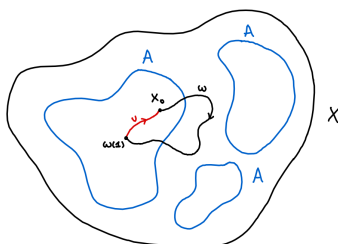
1. Esattezza in  $\pi_0(A, x_0)$ :

Sia  $a \in A$  tale che  $i_*[a] = [x_0]$  (dunque appartenente alla stessa componente connessa per archi di  $x_0$  in  $X$ ). Allora esiste  $\gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = a$ , per cui  $[\gamma] \in \pi_1(X, A, x_0)$  e  $\partial[\gamma] = [\gamma(1)] = [a]$ .

2. Esattezza in  $\pi_1(X, A, x_0)$ :

Sia  $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ , cioè  $\varphi : I \rightarrow X$  con  $\varphi(0) = x_0 = \varphi(1)$ . La classe  $j_*[\varphi] \in \pi_1(X, A, x_0)$  è ancora rappresentata da  $\varphi$ , ora vista come mappa tale che  $I \mapsto X$ ,  $\{0, 1\} \mapsto A$ ,  $\{0\} \mapsto \{x_0\}$ . Ma allora  $\partial(j_*[\varphi]) = [\varphi(1)] = [x_0]$ , cioè  $\partial \circ j_*$  è la mappa banale.

Resta dunque da mostrare  $\ker(\partial) \subseteq \text{Im}(j_*)$ : sia  $\omega : I \rightarrow X$  un rappresentante di un elemento di  $\pi_1(X, A, x_0)$  tale che  $\partial[\omega] = [x_0]$ , cioè  $\omega(1)$  è nella stessa componente connessa per archi di  $x_0$  in  $A$ . Allora esiste  $u : I \rightarrow A$  tale che  $u(0) = \omega(1)$ ,  $u(1) = x_0$ , per cui  $\omega * u \in \pi_1(X, x_0)$ :



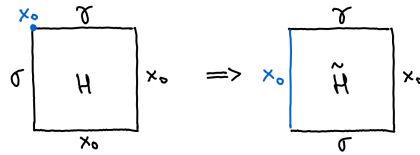
<sup>6</sup>Osservare che invece per  $n = 0$  si ha  $\partial[h] = [h(1)]$ .

Possiamo allora considerare l'omotopia da  $\omega * u$  a  $\omega$  data dalla retrazione di  $u$  su  $u(0)$ . Questa è un'omotopia valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$ , quindi in  $\pi_1(X, A, x_0)$  si ha  $[\omega * u] = [\omega]$ , che è esattamente equivalente a dire  $j_*[\omega * u] = [\omega]$ , che è quello che si voleva provare.

3. Esattezza in  $\pi_1(X, x_0)$ :

Sia  $\gamma \in \pi_1(A, x_0)$ . Poiché  $\gamma$  ha immagine tutta contenuta in  $A$ , l'omotopia che retrae  $\gamma$  su  $\gamma(0) = x_0$  è valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$ , cioè in  $\pi_1(X, A, x_0)$  si ha  $[\gamma] = [x_0]$ , che è equivalente a dire  $j_*(i_*[\gamma]) = [x_0]$ . Si è dunque provato che  $j_* \circ i_*$  è la mappa banale.

Resta da mostrare  $\ker(j_*) \subseteq \text{Im}(i_*)$ : sia  $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$  tale che  $j_*[\gamma] = [x_0]$ , cioè esiste un'omotopia valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$  da  $\gamma$  a  $x_0$ , cioè esiste  $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$  tale che  $\gamma * \sigma$  è omotopo a estremi fissi a  $x_0$ . Se ne deduce un'omotopia a estremi fissi da  $\sigma$  a  $\gamma$ :



cioè  $i_*[\sigma] = [\gamma]$ , che è quello che si voleva mostrare.

□

**Osservazione.** Dato  $(X, x_0)$  e un'inclusione  $A \xhookrightarrow{\ell} X$  possiamo considerare la *fibra omotopica*:

$$\underbrace{F(\ell)}_{\text{fibra omotopica}} = \{(a, \gamma) \in A \times PX : \gamma(1) = a\} \simeq \{\gamma \in PX : \gamma(1) \in A\} = \underbrace{F(X, A)}_{\text{fibra relativa}}$$

dove  $PX = \{\gamma : I \rightarrow X : \gamma(0) = x_0\}$  è l'insieme dei cammini liberi.

Per  $n \geq 1$ , a  $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  associo la mappa aggiunta

$$f^\wedge : \begin{matrix} I^n & \rightarrow & F(X, A) \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & f^\wedge(t_1, \dots, t_n) \end{matrix} \quad \text{con} \quad f^\wedge(t_1, \dots, t_n)(t) = f(t_1, \dots, t_n, t)$$

Osserviamo che per  $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$  si ha  $(t_1, \dots, t_n, t) \in J^n$  per ogni  $t \in I$ , per cui ogni punto di  $\partial I^n$  è mandato da  $f^\wedge$  nel cammino costante  $x_0$ , dunque  $f^\wedge$  passa al quoziente  $I^n / \partial I^n$  definendo

$$\bar{f} : I^n / \partial I^n \rightarrow F(X, A)$$

che dà una bigezione

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \leftrightarrow \pi_n(F(X, A), *)$$

che è anche un omomorfismo di gruppi. Possiamo quindi interpretare i gruppi di omotopia di una coppia come i gruppi di omotopia di fibra omotopica.

**Osservazione.** Per  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ ,  $f_*$  commuta con  $\partial$ , cioè l'omotopia di coppia è naturale.

**Osservazione.** Tramite il mapping cylinder possiamo vedere ogni mappa, a meno di equivalenza omotopica, come un'inclusione: data  $f : X \rightarrow Y$ , il mapping cylinder è

$$M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 0) \sim f(x)$$

e osserviamo che  $M_f$  si retrae per deformazione su  $Y$ . Consideriamo dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \widehat{i_1^X} & \uparrow \\ & & M_f \end{array}$$

dove  $\widehat{i_1^X}$  è il passaggio al quoziente dell'inclusione di  $X$  al tempo 1 in  $X \times I$ . Abbiamo dunque fattorizzato  $f$  tramite un'inclusione e un'equivalenza omotopica.

Ora, data un'inclusione  $i : X \hookrightarrow Y$ , possiamo sostituire  $X$  con  $P_X Y = \{\gamma : I \rightarrow Y : \gamma(1) \in X\}$  che si retrae per deformazione su  $X$ , e la mappa

$$\begin{array}{ccc} \bar{i} : P_X Y & \longrightarrow & Y \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(1) \end{array}$$

è una fibrazione di Serre, con fibra

$$F = F(i) = \{(x, \gamma) \in X \times P_X Y : \gamma(1) = x\}$$

cioè a meno di sostituire  $X$  con  $P_X Y$  possiamo vedere ogni inclusione come una fibrazione di Serre.

Ma allora, a meno di equivalenza omotopica ogni mappa possiamo vederla come inclusione, e quindi come fibrazione di Serre.

**Teorema 11.14** Se  $p : E \rightarrow B$  fibrazione di Serre,  $B_0 \subseteq B$ ,  $E_0 \subseteq E$ , con  $E_0 = p^{-1}(B_0)$ ,  $b_0 \in B$  punto base e  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  punto base di  $E$ , allora  $p$  induce una bigezione

$$p_* : \pi_n(E, E_0, e_0) \rightarrow \pi_n(B, B_0, b_0)$$

che è un isomorfismo per  $n > 1$  (cioè quando gli insiemi sono anche gruppi).

*Dimostrazione.* 1. *Suriettività:* sia  $x \in \pi_n(B, B_0, b_0)$  rappresentato da  $h : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, B_0, b_0)$ . Possiamo<sup>7</sup> sollevare  $h$  ad  $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_0, e_0)$  con dato iniziale  $H(J^{n-1}) \equiv e_0$  e con  $pH = h$ . Da questa uguaglianza segue  $H(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(h(\partial I^n)) \subseteq p^{-1}(B_0) = E_0$ . Quindi abbiamo  $H \in \pi_n(E, E_0, e_0)$  e  $p_* H = h$ .

2. *Iniiettività:* siano  $[x_0], [x_1] \in \pi_n(E, E_0, e_0)$  rappresentati da  $f_0, f_1$  e tali che  $p_*[x_0] = p_*[x_1]$ , cioè esiste un'omotopia  $\varphi_t : (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (B, B_0, b_0)$  tale che  $\varphi_0 = pf_0$ ,  $\varphi_1 = pf_1$ . Possiamo allora sollevare l'omotopia su  $T = \underbrace{I^n \times \{0, 1\}}_{\text{facce su cui vivono } \varphi_0, \varphi_1} \cup \underbrace{J^{n-1} \times I}_{\text{costante } b_0}$  nel seguente modo:

$$G : T \rightarrow E, \quad G(u, t) = \begin{cases} f_t(u) & t = 0, 1 \\ e_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora,  $T \subseteq \partial I^{n+1}$  è contraibile, dunque esiste  $H : I^n \times I \rightarrow E$  omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$ :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{G} & E \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad \text{cioè era } [x_0] = [x_1] \in \pi_n(E, E_0, e_0).$$

□

<sup>7</sup>Per Serre possiamo sollevare se abbiamo come dato iniziale una faccia del cubo; qua abbiamo come dato iniziale  $J^{n-1}$ , ma basta sfruttare che  $(I^n, J^{n-1}) \simeq (I^n, I^{n-1})$ .

**Corollario 11.15** Sia  $p : E \rightarrow B$  fibrazione di Serre,  $F = p^{-1}(b_0) \subseteq E$ . Allora

$$\pi_n(E, F, e_0) = \pi_n\left(B, \underbrace{\{b_0\}}_{p(F)}, \underbrace{b_0}_{p(e_0)}\right) = \pi_n(B, b_0)$$

quindi abbiamo una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \dots$$

detta *successione esatta lunga di omotopia di fibrazione*.

*Dimostrazione.* Basta sfruttare la Proposizione 11.13 (successione esatta lunga della coppia in omotopia) e quanto osservato nell'enunciato.  $\square$

**Osservazione.** Tutti i fibrati localmente banali sono fibrazioni di Serre.

**Osservazione.** Rivestimenti sono fibrazioni di Serre, allora possiamo sfruttare il Corollario 11.15 per ottenere informazioni sui gruppi di omotopia di spazi a partire dai gruppi di omotopia dei loro rivestimenti. Ad esempio, consideriamo  $B = S^1$ , con rivestimento  $E = \mathbb{R}$ . La fibra di un punto base è discreta, quindi  $\pi_i(F, *) = 0$  per  $i > 0$ . Dalla successione esatta allora segue  $\pi_i(S^1) \simeq \pi_i(\mathbb{R}) = 0$  per  $i \geq 2$ .

**Osservazione.** Rivestimenti hanno sempre fibra sul punto base discreta (sono omeomorfismi locali), quindi ragionando come nell'osservazione precedente si trova che i gruppi di omotopia in grado  $\geq 2$  di uno spazio sono isomorfi ai rispettivi gruppi di omotopia di un suo rivestimento universale (ammesso che lo spazio in questione sia "sufficientemente bello"<sup>8</sup>, in modo che abbia rivestimento universale).

### 11.3 Teorema di Escissione in Omotopia

Enunciamo il seguente risultato, che è l'equivalente del Teorema 2.33 di escissione in omologia:

**Teorema 11.16** [Blakers-Massey] Sia  $Y$  unione di due aperti  $Y_1, Y_2$  con  $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Supponiamo

$$\begin{aligned} \pi_i(Y_1, Y_0, *) &= 0 & \text{per } 0 < i < p, p \geq 1 \\ \pi_j(Y_2, Y_0, *) &= 0 & \text{per } 0 < j < q, q \geq 1 \end{aligned}$$

Allora per qualsiasi scelta di  $* \in Y_0$  la mappa indotta dall'inclusione  $(Y_2, Y_0) \hookrightarrow (Y, Y_1)$

$$\iota : \pi_n(Y_2, Y_0, *) \rightarrow \pi_n(Y, Y_1, *) \quad (\text{escissione})$$

è suriettiva per  $1 \leq n \leq p + q - 2$  ed è biettiva per  $1 \leq n < p + q - 2$ .

Sfruttiamo il Teorema 11.16 per studiare i gruppi di omotopia di  $S^n$ : Possiamo decomporre la sfera come  $S^n = E_+^n \cup E_-^n$  dove  $E_+^n, E_-^n$  sono gli emisferi superiore e inferiore. Abbiamo  $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$ .

**Osservazione.** Per usare il Teorema 11.16 vorremmo decomporre lo spazio in aperti, gli emisferi invece sono dei chiusi. Tuttavia a meno di equivalenza omotopica abbiamo  $E_+^n \sim S^n \setminus \{S\}$ ,  $E_-^n \sim S^n \setminus \{N\}$  (dove  $N, S$  sono il polo nord e il polo sud). Usiamo quindi direttamente gli emisferi, invece che due aperti.

<sup>8</sup>Condizione necessaria e sufficiente è che sia semilocalmente semplicemente connesso.

**Teorema 11.17** 1)  $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n)$  per  $i, n \geq 0$

2)  $\pi_i(S^n) = \pi_i(S^n, E_-^n)$  per  $i > 0, n \geq 0$

3)  $\pi_i(S^n) = 0$  per  $i < n$ .

*Dimostrazione.* 1) Consideriamo la successione della coppia  $(E_+^{n+1}, S^n)$ :

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(E_+^{n+1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(E_+^{n+1}) \longrightarrow \dots$$

e il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $E_+^{n+1}$  è contraibile. Segue la tesi per esattezza.

2) Consideriamo la successione della coppia  $(S^n, E_-^n)$ : ( $i > 0$ )

$$\dots \longrightarrow \pi_i(E_-^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n, E_-^n) \longrightarrow \pi_{i-1}(E_-^n) \longrightarrow \dots$$

e il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $E_-^n$  è contraibile. Segue la tesi per esattezza.

3) Mostriamo per induzione su  $n$  che  $\pi_{i+1}(S^{n+1}) = \pi_i(S^n) = 0$  per  $i < n$ :

*Passo Base*  $n = 1$ : sappiamo  $\pi_0(S^1) = 0, \pi_1(S^2) = 0$ , tesi.

*Passo Induttivo*  $n \geq 2$ : usiamo il Teorema 11.16 con  $Y = S^{n+1}, Y_1 = E_+^{n+1}, Y_2 = E_-^{n+1}$ : abbiamo

$$\begin{cases} \pi_i(E_+^{n+1}, S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0 \\ \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0 \end{cases} \quad \text{per } i \leq n$$

quindi possiamo prendere  $p = q = n + 1$ . Per escissione (per usare 2) serve  $i > 0$ )

$$\pi_{i-1}(S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\iota} \pi_i(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \stackrel{2)}{=} \pi_i(S^{n+1})$$

isomorfismo per  $1 \leq i < 2n = p + q - 2$ , suriettivo per  $1 \leq i \leq 2n$ . Poiché  $n \geq 2$  si ha  $2n > n$ , quindi in particolare  $\iota$  è isomorfismo per  $1 < i \leq n$ , cioè per  $1 < i \leq n$  si ha  $\pi_i(S^{n+1}) = \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0$ . È immediato che  $\pi_0(S^n) = 0$ . Tesi.  $\square$

## 11.4 Isomorfismo di Freudenthal

**Definizione 66** Sia  $(X, x_0)$  spazio puntato. Consideriamo la mappa di sospensione

$$\Sigma : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, x_0)$$

definita tramite l'isomorfismo aggiunto:

$$(f : (S^i, *) \rightarrow (X, x_0)) \xrightarrow{\Sigma} (S_f : (S^1 \wedge S^i, *) \rightarrow (SX, *))$$

**Lemma 11.18**  $\Sigma$  è omomorfismo.

*Dimostrazione.* Consideriamo il cono ridotto  $CX = (I, 0) \wedge (X, x_0) = I \times X / I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X$ , l'inclusione  $X \hookrightarrow CX$  data da  $x \mapsto [(x, 1)]$  e il quoziente  $SX = CX/X$ . Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{i+1}(SX, *) \\ \partial \uparrow & & \downarrow \simeq \\ \pi_{i+1}(CX, X, x_0) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_{i+1}(CX/X, *) \end{array}$$

Con  $\partial$  tratta dalla successione esatta lunga della coppia, che è isomorfismo (perché i termini adiacenti della successione sono nulli essendo  $CX$  contraibile), e la mappa verticale di destra che è un isomorfismo perché indotta da un omeomorfismo;  $\alpha$  la mappa indotta dalla proiezione al quoziente. Segue che  $\Sigma$  si scrive come composizione di omomorfismi, tesi.  $\square$

**Teorema 11.19** (Isomorfismo di Freudenthal) La sospensione  $\pi_{i-1}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_i(S^{n+1})$  è un isomorfismo per  $i < 2n$ , omomorfismo suriettivo per  $i = 2n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo  $S(S^n) = S^{n+1}$ ,  $CS^n \simeq E_+^{n+1} \simeq E_-^{n+1}$ . Come visto nella dimostrazione del Lemma 11.18,  $\Sigma$  si fattorizza come

$$\begin{array}{ccc} \pi_{i-1}(S^n) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_i(S^{n+1}) \\ \partial(\simeq) \uparrow & & \downarrow \simeq \\ \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_i(E_-^{n+1}/S^n, *) \end{array}$$

dunque per concludere basta mostrare che  $\alpha$  è un isomorfismo per  $i < 2n$  e che è suriettivo per  $i = 2n$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_i(E_-^{n+1}/S^n, *) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \simeq \\ \pi_i(S^{n+1}, E_-^{n+1}) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_i(S^{n+1}/E_-^{n+1}) \end{array}$$

con la mappa la mappa orizzontale in basso che è un isomorfismo perché  $E_-^{n+1}$  è contraibile (cioè tale mappa è indotta da un'equivalenza omotopica), la mappa verticale a destra che è isomorfismo perché indotta da un omeomorfismo e  $\iota$  data da escissione (fatta con  $S^{n+1}, E_+^{n+1}, E_-^{n+1}$ <sup>9</sup>), dunque è isomorfismo per  $i < 2n$  ed è suriettiva per  $i = 2n$ .  $\square$

**Corollario 11.20**  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dimostrazione.* Dal Teorema 11.19 (Isomorfismo di Freudenthal) si ha la seguente successione:

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\simeq} \pi_3(S^3) \xrightarrow{\simeq} \pi_4(S^4) \xrightarrow{\simeq} \dots$$

dunque per concludere basta mostrare che  $\pi_2(S^2)$  è infinito<sup>10</sup>. Per vederlo, basta osservare che esistono infinite mappe  $[S^2, S^2]^0 \rightarrow \text{Hom}(H_2(S^2), H_2(S^2)) = \mathbb{Z}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc} S^2 = \mathbb{C} \cup \infty & \rightarrow & \mathbb{C} \cup \infty = S^2 \\ z & \mapsto & z^n \\ \infty & \mapsto & \infty \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc} H_2(S^2) & \rightarrow & H_2(S^2) \\ 1 & \mapsto & n \end{array} \right) = n.$$

$\square$

<sup>9</sup>Per usare escissione dovremmo usare aperti, basta "incicciottire" gli emisferi e tutto funziona.

<sup>10</sup>Dal Primo Teorema di Omomorfismo segue che  $\pi_2(S^2)$  è isomorfo ad un quoziente di  $\mathbb{Z}$ ; se è infinito è  $\mathbb{Z}$ .

# Chapter 12

## Omotopia di Complessi CW

**Definizione 67** Una  $i : A \rightarrow X$  ha la proprietà dell'estensione dell'omotopia (HEP<sup>1</sup>) per  $Y$  se data un'omotopia  $h : A \times I \rightarrow Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $(f \circ i)(a) = h(a, 0)$  esiste  $H : X \times I \rightarrow Y$  tale che  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(i(a), t) = h(a, t)$ . Cioè esiste  $H$  tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times 0 & \swarrow i_0^X & & \downarrow f \\
 & & X \times I & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times Id & \swarrow H & & \downarrow f \\
 A \times I & \xrightarrow{h} & Y & & 
 \end{array}$$

L'omotopia  $H$  è detta estensione di  $h$  con dato iniziale  $f$ .

**Definizione 68**  $i : A \rightarrow X$  si dice cofibrazione se ha HEP per ogni spazio  $Y$ .

Data  $i : A \rightarrow X$ , consideriamo il suo mapping cylinder  $M_i$ , e siano  $k : A \times I \rightarrow M_i$ ,  $b : X \rightarrow M_i$  le proiezioni al quoziente. Per  $Y$  spazio topologico,  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  tali che  $h \circ i_0^A = f \circ i$ , esiste un'unica  $\sigma_Y : M_i \rightarrow Y$  tale che sia commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & & \swarrow b & & \downarrow f \\
 & & M_i & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow k & \swarrow \sigma_Y & & \downarrow f \\
 A \times I & \xrightarrow{h} & Y & & 
 \end{array}$$

**Teorema 12.1** Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

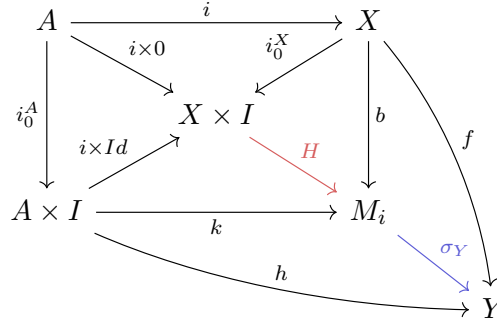
1.  $i : A \rightarrow X$  ha HEP per  $M_i$
2.  $i : A \rightarrow X$  è cofibrazione
3.  $\sigma_{X \times I} : M_i \rightarrow X \times I$  indotta dalla proprietà universale del mapping cylinder ammette re-trazione.

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione riprendiamo la notazione appena introdotta.

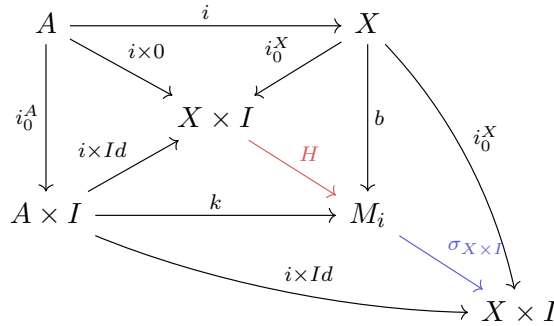
(1.  $\implies$  2.) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  tali che  $h \circ i_0^A = f \circ i$ , dunque esiste un'unica

<sup>1</sup>Homotopy Extension Property.

$\sigma_Y : M_i \rightarrow Y$  che tale che  $f = \sigma_Y \circ b$  e  $h = \sigma_Y \circ k$ . Inoltre per ipotesi  $i$  ha HEP per  $M_i$ , abbiamo dunque il seguente diagramma commutativo:



Ma allora  $\sigma_Y \circ H$  è estensione di  $h$  con dato iniziale  $f$ , cioè  $i$  ha HEP per ogni spazio  $Y$ .  
 (2.  $\implies$  3.) Sia  $Y = X \times I$ ,  $H : X \times I \rightarrow M_i$  estensione dell'omotopia  $k$  con dato iniziale  $b$ . Abbiamo dunque il seguente diagramma commutativo:



e per la proprietà universale del mapping cylinder  $H \circ \sigma_{X \times I} = Id_{M_i}$ , cioè  $\sigma_{X \times I}$  ammette retrazione  $H$ .

(3.  $\implies$  2.) Detta  $H' : X \times I \rightarrow M_i$  retrazione di  $\sigma_{X \times I}$ , dato uno spazio  $Y$  basta considerare l'estensione  $H = \sigma_Y \circ H' : X \times I \rightarrow Y$ .

(2.  $\implies$  1.) Ovvio. □

**Fatto 12.2** Se  $i : A \rightarrow X$  è cofibrazione, allora è un embedding. Inoltre, se  $X$  è Hausdorff allora  $i(A)$  è chiuso.

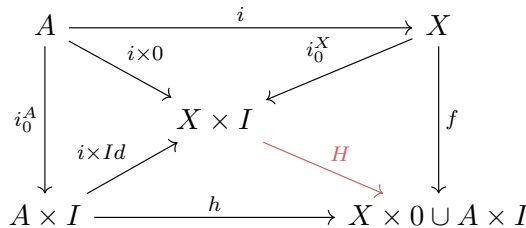
D'ora in poi consideriamo fibrazioni chiuse (in particolare quindi avremo  $i(A)$  chiuso).

**Definizione 69** Se  $\{x_0\} \hookrightarrow X$  è cofibrazione chiusa, diciamo che  $(X, x_0)$  è uno spazio *ben puntato*, e che  $x_0$  è punto base non degenerare.

**Proposizione 12.3** Sia  $i : A \rightarrow X$  un'inclusione chiusa. Allora  $i$  è una cofibrazione se e solo se l'inclusione  $j : X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  ha una retrazione.

*Dimostrazione.* ( $\implies$ ) Usiamo la HEP per  $X \times 0 \cup A \times I$  con  $f : X \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  e  $x \mapsto (x, 0)$

con  $h : A \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  e  $(a, t) \mapsto (a, t)$ . Otteniamo dunque il diagramma commutativo





e  $H$  è retrazione per  $j$  (è immediata la verifica  $H \circ j = Id_{X \times 0 \cup A \times I}$ ).

( $\Leftarrow$ ) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  che si comportano secondo la definizione. Allora la mappa  $g : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Y$  data da  $g(x, 0) = f(x)$ ,  $g(a, t) = h(a, t)$  è continua. Detta  $r$  una retrazione per  $j$  allora la composizione  $X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{g} Y$  è estensione dell'omotopia. Dunque  $i$  è cofibrazione.  $\square$

**Esempio 8** L'inclusione  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  è una cofibrazione:

Consideriamo  $D^n \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  e la mappa  $D^n \times I \rightarrow D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$  che ad ogni punto associa la proiezione dal punto  $P = (0, \dots, 0, 2)$ , cioè per ogni  $x \in D^n \times I$  consideriamo la semiretta  $r_x$  uscente da  $P$  e passante per  $x$ , e mandiamo  $x$  in  $r_x \cap (D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I)$ . Si verifica facilmente che questa è una retrazione dell'inclusione.

**Lemma 12.4** Se  $i : A \rightarrow X$  cofibrazione,  $g : A \rightarrow Y$  e  $Z = X \sqcup Y / i(a) \sim g(a)$ , allora anche la mappa di proiezione  $\pi_Y : Y \rightarrow Z$  è cofibrazione, cioè dalla cofibrazione “sopra” otteniamo una cofibrazione “sotto”:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ g \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Z \end{array}$$

*Dimostrazione.* Data  $h : Y \times I \rightarrow W$  e  $f : Z \rightarrow W$  tali che  $h(y, 0) = f(\pi_Y(y))$ , la seguente composizione, dato che  $i$  è cofibrazione, si estende:

$$A \times I \xrightarrow{g \times Id} Y \times I \xrightarrow{h} W \quad \rightsquigarrow \quad H' : X \times I \rightarrow W$$

abbiamo cioè il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{i \times Id} & X \times I \\ g \times Id \downarrow & & \downarrow \pi_X \times Id \\ Y \times I & \xrightarrow{\pi_Y \times Id} & Z \times I \end{array} \begin{array}{c} \searrow H' \\ \searrow H \\ \searrow h \end{array}$$

ed è immediato che esista una mappa  $H : Z \times I \rightarrow W$  che commuti.  $\square$

**Corollario 12.5** Dato  $X$  complesso CW,  $X^n \hookrightarrow X$  è cofibrazione.

*Dimostrazione.* Abbiamo visto nell'Esempio 8 che l'inclusione  $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$  è cofibrazione per ogni  $n$ . Possiamo inoltre rappresentare l'incollamento di  $n$ -celle mediante il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup S^n & \longrightarrow & \bigsqcup D^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

dove la mappa di sopra è cofibrazione perché lo è sulle singole componenti, e si sta facendo un'unione disgiunta. Inoltre valgono le ipotesi del Lemma 12.4, dunque anche la mappa  $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$  è una cofibrazione. Inoltre composizione di cofibrazioni è ancora una cofibrazione, dunque  $X^n \hookrightarrow X^{n+m}$  è cofibrazione per ogni  $m \in \mathbb{N}$ . Ma allora anche  $X^n \hookrightarrow X$  è cofibrazione, infatti basta estendere l'omotopia uno scheletro alla volta, in modo coerente con le inclusioni, e si trova così un'omotopia  $X \times I \rightarrow Y$ .  $\square$

**Osservazione.** Se  $X$  è complesso CW e  $A \subseteq X$  è un sottocomplesso,  $(X, A)$  è una coppia CW e  $A \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (la dimostrazione è uguale a quella per il Corollario 12.5).

### 12.1 Teorema di Approssimazione Cellulare

**Definizione 70** Una coppia di spazi connessi per archi  $(X, A)$  è  $n$ -connessa se  $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  per ogni  $x_0 \in A$  e per  $i \leq n$ .

**Esempio 9** La coppia  $(D^n, S^{n-1})$  è  $(n - 1)$ -connessa: dalla successione della coppia abbiamo

$$0 = \pi_{i+1}(D^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(D^n) = 0$$

per cui per ogni  $i$  si ha

$$\pi_{i+1}(D^n, S^{n-1}) \simeq \pi_i(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n - 1 \\ 0 & i < n - 1 \end{cases}$$

**Osservazione.** Se  $(X, A)$  è una coppia  $n$ -connessa, dalla successione della coppia si ha per  $0 < i < n$

$$0 = \pi_{i+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_i(A, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, A, x_0) = 0$$

cioè  $\pi_i(A, x_0) \simeq \pi_i(X)$  per  $0 < i < n$ . Viceversa, se  $A \subseteq X$  e  $\pi_i(A, x_0) \simeq \pi_i(X, x_0)$  per  $i \leq n$  allora dalla successione della coppia segue che  $(X, A)$  è  $(n - 1)$ -connessa.

**Lemma 12.6**  $f : (D^i, S^{i-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$  è banale in  $\pi_i(X, A, x_0)$  se e solo se  $f$  è omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) ad una mappa  $f' : D^i \rightarrow A$ .

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo  $f$  omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) tramite  $h$  ad una mappa  $f'$  tale che  $f'(D^i) \subseteq A$ . Definiamo allora  $H : (D^i \times I, S^{i-1} \times I, * \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$  data da

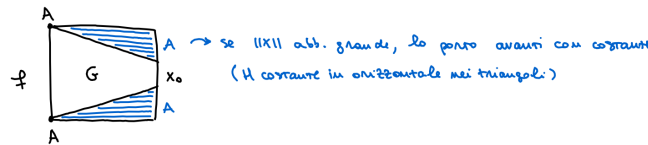
$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ f'(\underbrace{(2 - 2t)x + (2t - 1)*}_{\text{contrazione di } D^i}) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{omotopia da } f' \text{ alla mappa costante } f'(*))$$

e questa è un'omotopia tra  $f$  e la mappa costante  $f'(*) = x_0$ , cioè  $f$  banale in  $\pi_i(X, A, x_0)$ .

( $\Rightarrow$ ) Sia  $G : D^i \times I \rightarrow X$  omotopia tra  $f$  e la mappa costante  $x_0$ . Definiamo allora  $H : D^i \times I \rightarrow X$  data da

$$H(x, t) = \begin{cases} G(\frac{2x}{2-t}, t) & 0 \leq \|x\| \leq \frac{2-t}{2} \\ G(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|) & \frac{2-t}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

che possiamo rappresentare come segue:



e si ha  $H(x, 0) = G(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) \subseteq A$  perché  $G(\cdot, 1) \subseteq A$  e  $G(S^{n-1}, t) \subseteq A$ . Inoltre, per  $\|x\| = 1$  si ha  $H(x, t) = G(x, 0) = H(x, 0)$ , cioè  $H$  costante su  $S^{i-1}$ .  $\square$

**Corollario 12.7** 1.  $(X, A)$   $n$ -connessa se e solo se per ogni  $i \leq n$  ogni  $f : (D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  è omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) ad una  $g : D^i \rightarrow A$ .

2. Per  $X \supseteq A_1 \supseteq A_2$ , se  $(X, A_1)$  e  $(A_1, A_2)$  sono  $n$ -connesse allora  $(X, A_2)$  è  $n$ -connessa.

**Proposizione 12.8** Se  $X$  è un complesso CW, allora  $(X, X^n)$  è una coppia  $n$ -connessa.

*Dimostrazione.* Siano  $U_1, U_2 \subseteq X^{n+1}$  aperti,  $U_1$  unione di dischi aperti (uno per ogni  $(n+1)$ -cella) e  $U_2$  ingrossamento di  $X^n$  in  $X^{n+1}$  (ad esempio  $U_2 = X^{n+1} \setminus \{\text{centri delle } (n+1)\text{-celle}\}$ ). Per costruzione  $U_1 \cup U_2 = X^{n+1}$  e  $(U_1, U_1 \cap U_2) \overset{\text{omotopia}}{\sim} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} (D_\alpha^{n+1}, S_\alpha^n)$  con  $\Lambda$  che indicizza le  $(n+1)$ -celle. In particolare

$$\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) = 0 \quad \text{per } i \leq n \tag{12.1}$$

Applicando allora il Teorema 11.16 (di escissione in omotopia) con  $Y = X^{n+1}$ ,  $Y_1 = U_1$ ,  $Y_2 = U_2$ ,  $p = n+1$  e  $q = 1$  si ottiene

$$\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow \pi_i(X^{n+1}, U_2) \overset{(\star)}{=} \pi_i(X^{n+1}, X^n) \quad \text{suriettiva per } i \leq p+q-2 = n$$

dove l'uguaglianza  $(\star)$  si ha perché  $U_2$  si retrae su  $X^n$ .

Per l'equazione (12.1)  $\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) = 0$  per  $i \leq n$ . Segue dunque che la coppia  $(X^{n+1}, X^n)$  è  $n$ -connessa. In particolare per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la coppia  $(X^{n+k+1}, X^{n+k})$  è  $(n+k)$ -connessa, e quindi anche  $n$ -connessa. Per il Corollario 12.7 (punto 2.) allora abbiamo che  $(X^{n+k}, X^n)$  è  $n$ -connessa per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Una  $f : D^i \rightarrow X$  ( $i \leq n$ ) ha immagine compatta, che quindi interseca un numero finito di celle, cioè esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $f(D^i) \subseteq X^{n+k}$ . Ma allora  $[f] \in \pi_i(X^{n+k}, X^n) = 0$ , quindi  $0 = [f] \in \pi_i(X, X^n)$ .  $\square$

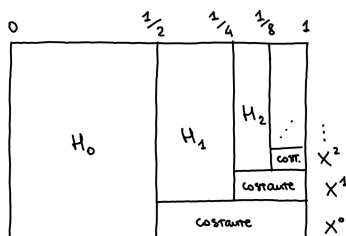
**Definizione 71**  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW si dice cellulare se  $f(X^n) \subseteq Y^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 12.9** (di Approssimazione Cellulare) Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW è omotopa ad una mappa cellulare.

*Dimostrazione.* Costruiamo l'omotopia scheletro per scheletro, in particolare mostriamo per induzione che ci sono omotopie  $H^n : X \times I \rightarrow Y$  tali che:

1.  $H_0^0 = f$
2.  $H_1^{n-1} = H_0^n$  per ogni  $n \geq 1$
3.  $H_1^n(X^i) \subseteq Y^i$  per ogni  $i \leq n$
4.  $H^n$  costante su  $X^{n-1}$ .

Poi, date tali omotopie, se  $X = X^n$  basta incollarne in numero finito e si ha la tesi. Altrimenti poniamo  $H(x, t) = \begin{cases} H^i(x, 2^{i+1}(t-1+2^{-i})) & 1-2^{-i} \leq t \leq 1-2^{-i-1} \\ H^i(x, 1) & x \in X^i, t = 1 \end{cases}$ , che possiamo rappresentare così:



In particolare  $H$  è continua perché su ogni  $n$ -scheletro incolliamo solo un numero finito di omotopie (poi la mappa è costante). Costruiamo dunque delle tali  $H^n$ :

$n=0$ : per ogni  $x \in X^0$  fissiamo un punto  $y_0 \in Y^0$  nella stessa componente connessa per archi di  $f(x)$  e un cammino da  $f(x)$  a  $y_0$ . In questo modo si definisce un'omotopia tra  $f|_{X^0}$  e una mappa  $X^0 \rightarrow Y^0$ . Poiché l'inclusione  $X^0 \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (Corollario 12.5), possiamo estendere

l'omotopia a tutto  $X$ . Si è così definita un'omotopia tra  $f$  e una  $\tilde{f}$  tale che  $\tilde{f}(X^0) \subseteq Y^0$ .

$n > 0$ : supponiamo senza perdita di generalità  $f(X^i) \subseteq Y^i$  per  $i \leq n-1$ . Consideriamo una mappa di incollamento  $\varphi_\alpha : (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ ; allora  $f \circ \varphi_\alpha : (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1}) \subseteq (Y, Y^n)$ .

D'altra parte per la Proposizione 12.8  $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ , quindi  $f \circ \varphi_\alpha$  è omotopa (relativamente a  $S_\alpha^{n-1}$ ) ad una mappa  $(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (Y^n, Y^{n-1})$ . Possiamo iterare questo ragionamento per tutte le  $n$ -celle, e otteniamo così un'omotopia tra  $f|_{X^n}$  e una mappa  $X^n \rightarrow Y^n$ . Poiché l'inclusione  $X^n \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (Corollario 12.5), l'omotopia si estende ad un'omotopia  $H^n$  definita su tutto  $X$ , tra  $f$  e  $\tilde{f}$  tale che  $\tilde{f}(X^n) \subseteq Y^n$ , con  $H^n$  che è costante su  $X^{n-1}$ .  $\square$

**Osservazione.** L'unica proprietà di  $Y$  che si è usata è che  $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ , quindi la stessa dimostrazione dà anche la seguente:

**Proposizione 12.10** Sia  $X$  complesso CW,  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $T \subseteq Y$  tale che  $\pi_i(Y, T) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Allora  $f$  è omotopa ad una  $g : X \rightarrow T$ . Inoltre, se  $X' \subseteq X$  è un sottocomplesso tale che  $f(X') \subseteq T$ , allora possiamo scegliere un'omotopia che sia costante su  $X'$ .

## 12.2 Teorema di Whitehead

**Lemma 12.11** Se  $f : X \rightarrow Y$  mappa tra complessi CW è cellulare, allora il suo mapping cylinder  $M_f$  è un complesso CW e si può vedere  $X$  come suo sottocomplesso.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ .

$X \times I$  ha una struttura di complesso CW, con celle  $e^i \times \{0\}$ ,  $e^i \times \{1\}$ ,  $e^i \times (0, 1)$  al variare di  $e^i$   $i$ -cella di  $X$ <sup>2</sup>. Definiamo induttivamente una struttura cellulare su  $M_f$ :

$n = 0$ : prendiamo le 0-celle di  $X$  e  $Y$ .

$n > 0$ : dato  $M_f^{n-1}$ , attacchiamo le celle  $e^n \times \{0\}$ ,  $e^{n-1} \times (0, 1)$  di  $X \times I$  e poi le  $n$ -celle di  $Y$ . Presa una  $n$ -cella di  $X \times I$  della forma  $e^{n-1} \times (0, 1)$ , questa ha bordo che è contenuto nell' $(n-1)$ -scheletro di  $X \times I$ <sup>3</sup>. Inoltre  $f$  è cellulare, dunque  $f(X^{n-1}) \subseteq Y^{n-1}$ , quindi  $(X \times \{0\})^{n-1} \rightarrow Y^{n-1} \subseteq M_f^{n-1}$ , cioè il bordo di una  $n$ -cella come descritto è in  $M_f^{n-1}$ , come voluto.  $\square$

**Teorema 12.12** (Whitehead) Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa tra complessi CW che induce un isomorfismo  $\pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Allora  $f$  è un'equivalenza omotopica.

*Dimostrazione.* A meno di omotopia  $f$  è mappa cellulare. Senza perdita di generalità possiamo supporre che  $f$  sia un'inclusione, infatti: preso il mapping cylinder  $M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ , possiamo considerare l'inclusione  $X \hookrightarrow X \times 0 \subseteq M_f$ , che è una mappa cellulare per il Lemma 12.11, e la retrazione per deformazione, quindi omotopa all'identità,  $M_f \rightarrow Y$ . Abbiamo che  $f$  si fattorizza tramite la composizione  $X \hookrightarrow M_f \rightarrow Y$ , ed essendo la retrazione omotopa all'identità è sufficiente studiare il caso di  $f$  inclusione.

Sia dunque  $f : X \hookrightarrow Y$  un'inclusione di sottocomplessi. La successione della coppia  $(X, Y)$  è

$$\dots \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_i(Y, x_0) \longrightarrow \pi_i(Y, X, x_0) \longrightarrow \pi_{i-1}(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_{i-1}(Y, x_0) \longrightarrow \dots$$

<sup>2</sup>In particolare le celle della forma  $e^i \times \{0\}$ ,  $e^i \times \{1\}$  sono  $i$ -celle di  $X \times I$ , le celle della forma  $e^i \times (0, 1)$  sono  $(i+1)$ -celle di  $X \times I$ .

<sup>3</sup>Che è il dato delle celle della forma  $e^{n-2} \times I$  unito a  $(X \times \{0\})^{n-1}$  e  $(X \times \{1\})^{n-1}$ .

quindi per esattezza si ha  $\pi_i(Y, X, x_0) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . In particolare allora, per la Proposizione 12.10,  $Id_Y$  è omotopa (relativamente a  $X$ ) ad una mappa  $Y \rightarrow X$ , cioè  $X$  è retratto per deformazione di  $Y$ , dunque  $f$  è equivalenza omotopica.  $\square$

**Corollario 12.13** Un complesso CW che ha tutti i gruppi di omotopia banali è contraibile.

## 12.3 Teorema di Approssimazione CW

**Teorema 12.14** (di Approssimazione CW)

Sia  $A$  complesso CW,  $k \geq -1$ ,  $Y$  spazio topologico e  $f : A \rightarrow Y$  tale che

$$f_* : \pi_i(A, *) \rightarrow \pi_i(Y, *) \quad \text{isomorfismo per } i < k, \text{ suriettivo per } i = k.$$

Allora per ogni  $n > k$ , anche  $n = \infty$ , esiste  $X$  complesso CW contenente  $A$  come sottocomplesso ed esiste  $F : X \rightarrow Y$  che estende  $f$  e tale che

$$F_* : \pi_i(X, *) \rightarrow \pi_i(Y, *) \quad \text{isomorfismo per } i < n, \text{ suriettivo per } i = n.$$

Inoltre  $X$  è ottenuto da  $A$  attaccando  $d$ -celle al variare di  $k \leq d \leq n$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che incollando  $d$ -celle ad  $A$  con  $d > k$  i gruppi di omotopia di grado  $i < k$  non cambiano. Infatti, data una mappa  $f : S^i \rightarrow X$ , questa è omotopa, per il Teorema 12.9 (di Approssimazione Cellulare), ad una  $f' : S^i \rightarrow A$  ( $i < k$ ). Analogamente, un'omotopia  $H$  tra  $f$  e  $f'$  è omotopa a  $H'$  a valori in  $A$ . Questi attaccamenti quindi non modificano i gruppi di omotopia per  $i < k$ .

Mostriamo la tesi per induzione:

$n = 0$ : se  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$  non è suriettiva, aggiungo 0-celle ad  $A$  in numero pari al numero di componenti connesse per archi di  $Y$  che non sono raggiunte, e le mappo su tali componenti connesse per archi di  $Y$ . Si ha dunque ora suriettività.

$n = 1$ : supponiamo  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$  suriettiva. Per ogni  $a, b \in A^0$  con  $f(a)$  e  $f(b)$  nella stessa componente connessa per archi di  $Y$ , aggiungo una 1-cella che collega  $a$  e  $b$ , e la mappo su un cammino tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . In questo modo si ottiene l'iniettività.

Per ogni loop di  $Y$  che non è raggiunto, posso aggiungere una 1-cella a  $A$  e mapparla su tale loop, si ha così la suriettività a livello dei  $\pi_1$ .

$n > 1$ : supponiamo che  $f : A \rightarrow Y$  sia  $(n-1)$ -connessa, e senza perdita di generalità supponiamo che  $f$  sia un'inclusione (altrimenti sostituisco  $Y$  con il mapping cylinder  $M_f$ ). Fissiamo

$$(\Phi_j, \varphi_j) : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, A, *)$$

che siano generatori di  $\pi_n(Y, A, *)$  come  $\pi_1(A)$ -modulo ( $\pi_1(A)$  agisce su tale gruppo). Per ognuno di questi generatori, aggiungiamo ad  $A$  una  $n$ -cella, usando le  $\varphi_j$  come mappe di incollamento. Otteniamo così  $X \supseteq A$ , e possiamo estendere  $f$  ad una  $F : X \rightarrow Y$  tramite le  $\Phi_j$ . Ogni incollamento delle  $n$ -celle rappresenta una classe  $[x_j] \in \pi_n(X, A, *)$ , e per costruzione

$$F_*[x_j] = [(\Phi_j, \varphi_j)] \in \pi_n(Y, A, *)$$

La mappa  $F$  induce un omomorfismo tra le successioni esatte lunghe delle coppie:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X, A) = 0 \\ & & \parallel & & (1) \downarrow F_* & & (2) \downarrow F_* & & \parallel & & (3) \downarrow F_* & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(Y) & \longrightarrow & \pi_n(Y, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \xrightarrow{(4)} & \pi_{n-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per costruzione si ha che (2) è suriettiva (prende tutti i generatori) e che  $\pi_{n-1}(X, A) = 0$ . Inoltre (3) e (4) sono suriettive per ipotesi. Si conclude immediatamente tramite diagram chasing che (1) è suriettiva e (3) è iniettiva, cioè si ha suriettività a livello del  $\pi_n$  e isomorfismo al livello del  $\pi_{n-1}$ .

□

**Definizione 72**  $f : X \rightarrow Y$  è detta equivalenza omotopica debole se induce tra i gruppi di omotopia isomorfismi in ogni grado.

**Corollario 12.15** Se  $Y$  spazio topologico connesso per archi, allora esiste  $X$  complesso CW e  $F : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica debole.

*Dimostrazione.* Basta usare il Teorema 12.14 (Approssimazione CW) con  $k = -1$  e  $A = \{*\}$ . □

**Proposizione 12.16** Un'approssimazione CW è unica a meno di equivalenze omotopiche. Inoltre

$$Y \mapsto \{\text{classe di omotopia di una sua approssimazione CW}\}$$

è un funtore dagli spazi topologici connessi per archi a complessi CW a meno di omotopia.

*Dimostrazione.* Siano  $F_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $F_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  approssimazioni CW, e sia  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  continua. Vogliamo costruire  $f : X_1 \rightarrow X_2$  che faccia commutare, a meno di omotopia, il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

Mostrato questo, prendendo  $Y_1 = Y_2$  e  $g = Id$  otteniamo la tesi<sup>4</sup>.

A meno di sostituire  $X_2 \rightarrow Y_2$  con un'inclusione (usando il mapping cylinder) possiamo supporre  $X_2 \hookrightarrow Y_2$ . Poiché  $\pi_i(X_2) = \pi_i(Y_2)$  per ogni  $i$ , la coppia  $(Y_2, X_2)$  è  $i$ -connessa per ogni  $i$  (dalla successione della coppia). Per la Proposizione 12.10 allora la composizione  $X_1 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{g} Y_2 \supseteq X_2$  è omotopa ad una mappa  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Si verifica che due possibili  $f$  che fanno commutare sono omotope. □

Abbiamo il seguente caso particolare del Teorema 12.14 (di Approssimazione CW):

**Teorema 12.17** Sia  $Y$  complesso CW tale che  $\pi_i(Y) = 0$  per  $i \leq n$ . Allora  $Y$  è omotopicamente equivalente a  $X$  complesso CW tale che  $X^n = \{*\}$ .

*Dimostrazione.* Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 12.14 (di Approssimazione CW) si nota che in corrispondenza di gruppi di omotopia banali dello spazio da approssimare non è necessario modificare il corrispondente  $n$ -scheletro. La costruzione produce un complesso CW  $X$  con  $n$ -scheletro banale. □

<sup>4</sup>Passando ai gruppi di omotopia  $(F_1)_*$  e  $(F_2)_*$  sono isomorfismi, dunque per commutatività anche  $f_*$  lo è. Allora per il Teorema 12.12 (Whitehead)  $f$  è un'equivalenza omotopica.

## 12.4 Teorema di Hurewicz

Dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ , per  $n \geq 0$  definiamo il sottocomplesso delle catene di Eilenberg  $C_\bullet^{(n,A)}(X) \subseteq C_\bullet(X)$ , generato dai  $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$  tali che le facce con dimensione  $< n$  vanno in  $A$  (è immediato che questo sia davvero un sottocomplesso).

**Fatto 12.18** Se  $(X, A)$  è  $(n-1)$ -connessa allora l'inclusione  $C_\bullet^{(n,A)}(X) \hookrightarrow C_\bullet(X)$  è un'equivalenza omotopica di catene.

**Proposizione 12.19** Sia  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica debole. Allora  $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$  è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità  $f$  è un'inclusione (altrimenti si sostituisce  $Y$  con  $M_f$ ). Le ipotesi dicono che  $(Y, X)$  è  $n$ -connessa per ogni  $n$  (dalla successione della coppia), dunque abbiamo

$$H_i(Y) \stackrel{F.12.18}{\cong} H_i(C_\bullet^{(n,X)}(Y)) \quad \text{per ogni } i \text{ e per ogni } n$$

Per definizione, per  $i < n$  si ha  $C_i^{(n,X)}(Y) = C_i(X)$ , dunque per arbitrarietà di  $n$  si ha

$$H_i(C_\bullet^{(n,X)}(Y)) = H_i(C_\bullet(X))$$

Segue la tesi. □

**Osservazione.** Con gli strumenti visti, abbiamo che in linea teorica è sempre possibile approssimare uno spazio  $X$  con un complesso CW  $A$  debolmente omotopicamente equivalente, e usare  $A$  per calcolare l'omologia di  $X$ .

**Lemma 12.20** Per  $n > 1$  si ha

$$\pi_n\left(\bigvee_j S_j^n\right) = \bigoplus_j \pi_n(S_j^n)$$

ed è generato dalle inclusioni  $S_j^n \hookrightarrow \bigvee_j S_j^n$ .

*Dimostrazione.* Se il bouquet è finito: abbiamo  $\bigvee_j S_j^n \subseteq \prod_j S_j^n$ , con il primo che è il bouquet di complessi CW  $n$ -dimensionali, il secondo che è un complesso CW di dimensione  $> n$ , in particolare avente  $i$ -scheletri nulli se  $i$  non è multiplo di  $n$ . Per  $n \geq 2$  i due hanno  $n$ -scheletro coincidente e non sono presenti  $d$ -celle con  $n < d < 2n$ , dunque la coppia  $(\prod_j S_j^n, \bigvee_j S_j^n)$  è  $(2n-1)$ -connessa. Allora l'inclusione  $\bigvee_j S_j^n \hookrightarrow \prod_j S_j^n$  induce un isomorfismo sui  $\pi_n$ . Basta a questo punto usare il fatto noto  $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ .

Se il bouquet è infinito: la mappa  $\Phi : \bigoplus_j \pi_n(S_j^n) \rightarrow \pi_n(\bigvee_j S_j^n)$  indotta dalle inclusioni  $S_j^n \hookrightarrow \bigvee_j S_j^n$  è suriettiva e iniettiva per compattezza, infatti: una mappa dalla sfera in  $\bigvee_j S_j^n$  ha immagine compatta, dunque che interseca un numero finito di celle; analogamente, se una classe  $[\gamma]$  nell'immagine di  $\Phi$  è banale, allora esiste un'omotopia da  $\gamma$  alla mappa costante. Tale omotopia ha immagine compatta, dunque che interseca un numero finito di celle. Allora la stessa relazione si ha in  $\bigoplus_j \pi_n(S_j^n)$ . □

**Teorema 12.21** (Hurewicz) Sia  $X$  spazio topologico connesso per archi: c'è un omomorfismo functoriale

$$h_n : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

Inoltre se  $X$  è  $(n-1)$ -connesso allora: 1. se  $n = 1$  allora  $h_1$  è l'abelianizzazione  
2. se  $n > 1$  allora  $h_n$  è isomorfismo e  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per  $i < n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo già affrontato il caso  $n = 1$  con il Teorema 2.23.

Sia dunque  $n > 1$ : possiamo, senza perdita di generalità, supporre che  $X$  sia un complesso CW<sup>5</sup>. Inoltre per il Teorema 12.17 possiamo supporre  $X^{n-1} = \{*\}$ .

Poiché la coppia  $(X, X^{n+1})$  è  $(n+1)$ -connessa (Proposizione 12.8), l'inclusione  $X^{n+1} \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $\pi_n(X^{n+1}) \rightarrow \pi_n(X)$ . Inoltre, dalla successione della coppia  $(X, X^{n+1})$  in omologia si ottiene  $H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X)$ . Per funtorialità possiamo allora supporre  $X = X^{n+1}$  e  $X^n = \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ .

Poiché  $X^{n+1}$  è ottenuto incollando  $(n+1)$ -celle a  $X^n$ , si hanno mappe di incollamento  $\varphi_j : S_j^n \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Consideriamo allora

$$A := \bigvee_j S_j^n \xrightarrow{\varphi} \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n =: B$$

e vale che  $X$  è omotopicamente equivalente al mapping cone di  $\varphi$ <sup>6</sup>.

Osserviamo che per  $X = S^n$  la tesi vale, infatti  $\pi_n(S^n) \stackrel{C.11.20}{\cong} \mathbb{Z} = H_n(S^n)$  e  $h_n$  è

$$\begin{array}{ccc} h_n : \pi_n(S^n) & \rightarrow & H_n(S^n) \\ [f : S^n \rightarrow S^n] & \mapsto & f_*(a) \end{array} \quad \text{dove } a \text{ è un generatore di } H_n(S^n).$$

Inoltre, per  $X = \bigvee_j S_j^n$  la tesi segue dal Lemma 12.20, sfruttando l'additività di  $H_i$  e la naturalezza.

In generale abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \\ (1) \downarrow & & (2) \downarrow & & (3) \downarrow & & \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con (1) e (2) che sono isomorfismi per il Lemma 12.20. Segue che anche (3) è isomorfismo. Per concludere basta osservare che (ricordiamo  $X \sim$  mapping cone di  $\varphi$ ) per escissione si ha

$$(B, A) \stackrel{\text{escissione}}{\sim} (X, CA) \sim (X, *) \implies \pi_n(X) = \pi_n(B, A), \quad H_n(X) = H_n(B, A)$$

□

**Corollario 12.22** Se  $X$  è semplicemente connesso e  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per  $i < n$ , allora  $\pi_i(X) = 0$  per  $i < n$  e  $\pi_n(X) \simeq H_n(X)$ .

*Dimostrazione.* Si tratta di applicare induttivamente il Teorema 12.21 (Hurewicz). □

**Teorema 12.23** Sia  $(X, A)$  coppia di complessi CW semplicemente connessi con  $H_i(X, A) = 0$  per  $i < n$ ,  $n \geq 2$ . Allora  $\pi_i(X, A) = 0$  per  $i < n$  e  $h_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Per escissione, se  $A$  è semplicemente connesso e  $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < n$ , allora

$$\pi_n(X, A) \rightarrow \pi_n(X/A, *)$$

è isomorfismo (si sta usando che  $(X, A)$  è una buona coppia, cosa vera per complessi CW), e per il Teorema di Van Kampen  $\pi_1(X/A) = 0$ . Inoltre  $H_i(X, A) = \tilde{H}_i(X/A)$  (di nuovo, si sta usando che  $(X, A)$  è una buona coppia) e abbiamo  $\pi_i(X/A) = 0$  per  $i < n$ . Allora:

<sup>5</sup>Possiamo approssimare  $X$  con un complesso CW a lui debolmente omotopicamente equivalente (Teorema 12.14), e le equivalenze omotopiche deboli inducono isomorfismi anche in omologia (Proposizione 12.19).

<sup>6</sup>Il mapping cone di  $f : X \rightarrow Y$  è  $X \times I \sqcup Y / (x, 0) \sim (x', 0), (x, 1) \sim f(x)$



$n = 2$ : abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(X, A) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_2(X/A) \\ h_2 \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_2(X, A) & \xrightarrow{\simeq} & H_2(X/A) \end{array}$$

dove le mappe orizzontali sono date da escissione, la mappa verticale di destra è data dal Teorema 12.21 (Hurewicz). Per commutatività allora  $h_2$  è un isomorfismo.

$n > 2$ : per induzione, se  $H_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < j$ , allora  $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < j$ . Con lo stesso diagramma segue anche  $\pi_n(X, A) \simeq H_n(X, A)$ .

□



## Chapter 13

# Invariante di Hopf

Si è caratterizzata completamente l'omologia della sfera  $S^n$ :

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

mentre invece per i gruppi di omotopia ci siamo fermati a descrivere quelli fino all'ordine  $n$ :

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i < n \end{cases}$$

Vale il seguente Teorema:

**Teorema 13.1** (Serre) Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , esistono gruppi abeliani finiti  $G, \{G_i\}_{i>n}$  tali che

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} 0 & i < n \\ \mathbb{Z} & i = n \\ \mathbb{Z} \oplus G & i = 2n - 1, n \text{ pari} \\ G_i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare se ne deduce che per  $n$  dispari l' $n$ -esimo gruppo di omotopia è l'unico gruppo di omotopia infinito, mentre per  $n$  pari anche il  $(2n - 1)$ -esimo è infinito.

Non dimostriamo il Teorema 13.1, ma mostriamo che esiste una  $\mathcal{H} : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  che per  $n$  pari ha immagine infinita (questo dimostra che per  $n$  pari il  $(2n - 1)$ -esimo gruppo di omotopia è infinito). Tale  $\mathcal{H}$  prende il nome di *invariante di Hopf*.

Consideriamo una mappa  $f : X \rightarrow Y$  e il suo mapping cone  $C_f = CX \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ <sup>1</sup>, e sia  $j : Y \hookrightarrow C_f$  inclusione. In particolare, nel caso in cui  $X = S^n$ ,  $Y$  complesso CW e  $f$  mappa cellulare, si ha che  $C_f$  è il risultato dell'incollamento di una  $(n + 1)$ -cella su  $Y$ , proprio tramite la mappa  $f$ .

**Proposizione 13.2** Le mappe  $f : X \rightarrow Y$  e  $j : Y \rightarrow C_f$  inducono una successione esatta lunga in co-omologia:

$$\begin{aligned} H^0(Y) &\longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^1(C_f) \longrightarrow H^1(Y) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H^{i-1}(X) \xrightarrow{\partial} H^i(C_f) \xrightarrow{j^*} H^i(Y) \xrightarrow{f^*} H^i(X) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Inoltre, mappe  $X \rightarrow Y$  omotope inducono successione esatte lunghe isomorfe.

<sup>1</sup>Dove  $CX = X \times I / (x, 0) \sim (x', 0)$  è il cono di  $X$ .

*Dimostrazione.* Sia  $M_f$  il mapping cylinder di  $f$ . Abbiamo le inclusioni ovvie  $X \hookrightarrow X \times \{0\} \subseteq M_f$  e  $Y \hookrightarrow M_f$ , con quest'ultima che è un'equivalenza omotopica. Allora la successione esatta lunga in co-omologia della coppia  $(M_f, X)$  è

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(X) \longrightarrow H^i(M_f, X) \longrightarrow \underbrace{H^i(M_f)}_{=H^i(Y)} \longrightarrow H^i(X) \longrightarrow \dots$$

e per escissione la mappa  $M_f \xrightarrow{p} C_f$  che incolla  $X \times \{0\}$  sul punto base  $*$  induce

$$\tilde{H}^i(C_f) \simeq H^i(C_f, *) \xrightarrow{p^*} H^i(M_f, X) \quad \text{isomorfismo}$$

infatti:  $X \times \{0\} \subseteq M_f$  è retrato di  $\bar{X} = X \times [0, \frac{1}{2})$ . Inoltre, posto  $\bar{C} = p(\bar{X}) \subseteq C_f$ , si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H^i(M_f, X) & \xleftarrow{(1)} & H^i(M_f, \bar{X}) & \xrightarrow{(2)} & H^i(M_f \setminus X, \bar{X} \setminus X) \\ p^* \uparrow & & p^* \uparrow & & \uparrow Id \\ H^i(C_f, *) & \xleftarrow{(3)} & H^i(C_f, \bar{C}) & \xrightarrow{(4)} & H^i(C_f \setminus *, \bar{C} \setminus *) \end{array}$$

con (1), (3) che sono isomorfismi perché  $\bar{X}, \bar{C}$  si retraggono per deformazione rispettivamente su  $X$  e  $*$ , e (2), (4) che sono isomorfismi per escissione.

Infine, se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono omotope tramite  $H$ , allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I & \xleftarrow{i_1^X} & X \\ f_0 \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow f_1 \\ Y & \xrightarrow{Id} & Y & \xleftarrow{Id} & Y \end{array}$$

che induce isomorfismi sulle rispettive successioni esatte lunghe in co-omologia, dato che  $i_0^X$  e  $i_1^X$  sono equivalenze omotopiche.  $\square$

### 13.1 Costruzione dell'invariante $\mathcal{H}(f)$

Sia fissata una mappa  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Fissiamo anche  $x \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$  e  $y \in H^n(S^n)$  generatori dei rispettivi gruppi. Consideriamo il seguente pezzo della successione esatta della Proposizione 13.2:

$$\dots \longrightarrow \underbrace{H^{n-1}(S^{2n-1})}_{=0} \longrightarrow H^n(C_f) \xrightarrow{j^*} H^n(S^n) \longrightarrow \underbrace{H^n(S^{2n-1})}_{=0} \longrightarrow \dots$$

per cui  $H^n(C_f) \simeq H^n(S^n) = \mathbb{Z}$ . Analogamente:

$$\dots \longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(S^n)}_{=0} \longrightarrow H^{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^{2n}(C_f) \longrightarrow \underbrace{H^{2n}(S^n)}_{=0} \longrightarrow \dots$$

da cui  $H^{2n}(C_f) \simeq H^{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$ . Poniamo  $\alpha = (j^*)^{-1}(y) \in H^n(C_f)$  e  $\beta = \partial^*(x) \in H^{2n}(C_f)$ . Ma allora che  $\alpha \smile \alpha$  è multiplo di  $\beta$ <sup>2</sup>, cioè esiste  $\mathcal{H}(f) \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\alpha \smile \alpha = \mathcal{H}(f)\beta$$

<sup>2</sup>Per costruzione  $\beta$  è un generatore di  $H^{2n}(C_f)$ , in quanto è preimmagine tramite un isomorfismo di un generatore.

**Definizione 73**  $\mathcal{H}(f)$  è l'invariante di Hopf di  $[f]$ .

**Osservazione.** 1. Se  $g : S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $m$ , allora  $\mathcal{H}(gf) = m^2\mathcal{H}(f)$ .

2. Se  $g : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  ha grado  $m$ , allora  $\mathcal{H}(fg) = m\mathcal{H}(f)$ .

3. Se  $n$  è dispari, allora  $\mathcal{H}(f) = 0$  (perché  $\smile$  è anticommutativo).

**Fatto 13.3** Se  $n$  pari, allora esiste  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  tale che  $\mathcal{H}(f) = \pm 2$ .

**Corollario 13.4** Per  $n$  pari  $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$  è infinito.